

Skript zur Vorlesung

Physik II für Materialwissenschaftler

Elektrizität und Magnetismus

9. Juli 2019

0 Einleitung

Elektrizität und Magnetismus spielen im täglichen Leben eine nicht zu unterschätzende Rolle. Es fängt damit an, dass elektrische Wechselwirkung Materie und damit auch Materialien zusammenhält, und hört nicht damit auf, dass Elektrizität und Magnetismus die Grundvoraussetzung für Elektronik und moderne Kommunikation sind. In dieser Vorlesung werden einige Grundlagen zu der Thematik behandelt.

Die in Physik I (Mechanik) vorgestellten physikalischen und mathematischen Konzepte und Methoden werden als bekannt vorausgesetzt. Als das Skript zum ersten Mal erstellt wurde, war diese Vorlesung allerdings der Einstieg in die Physik. Deshalb kommt es hier und dort vor, dass manche Dinge, die schon in der Physik 1 erklärt wurden, hier noch einmal sehr detailliert geschildert werden. Zudem wird die Abfolge und der Inhalt des Skripts nicht immer zu 100% mit der Vorlesung übereinstimmen. Der Überlapp sollte in der Regel aber nicht sehr weit davon entfernt sein.

1 Elektrostatik

1.1 Die elektrische Ladung

Die Elektrostatik behandelt die Eigenschaften ruhender Ladungen. Sie beschränkt sich damit auf *stationäre* Systeme. Was bei der Gravitation die Masse ist, ist bei der Elektrostatik – sowie allgemein im Elektromagnetismus – die Ladung. Kräfte zwischen Ladungen sind allerdings nicht immer attraktiv sondern können auch repulsiv sein. Man unterscheidet zwei Typen von Ladungen, die per Konvention als "positiv" bzw. "negativ" bezeichnet werden. Gleiche Ladungen stoßen sich ab, ungleiche Ladungen ziehen sich an.

Wie so manch andere Größe ist auch die Ladung *quantisiert*. Das bedeutet, dass Ladungen nur in ganzzahligen Vielfachen einer kleinstmöglichen Einheit, der Elementarladung, vorkommen. Diese Elementarladung wird in der Physik mit e abgekürzt:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Für die Chemie, die Physik und die Materialwissenschaft relevant sind insbesondere die Ladungen für das Proton und das Elektron:

$$Q_{\text{Proton}} = +e \qquad Q_{\text{Elektron}} = -e.$$

Das Proton wird oft als p oder p^+ gekennzeichnet, das Elektron mit e^- . Die Ladung eines Atomkerns wird durch seine Kernladungszahl Z bestimmt, die angibt, wieviele Protonen im Kern vorhanden sind.

$$Q_{\text{Atomkern}} = Ze.$$

Diese Gleichung ist strikt gültig. Bei Massen gilt dies im Übrigen nicht ganz genau. Dank Einstein addieren sich die Massen der Protonen und Neutronen in einem Kern nämlich (unter Abstrahlung von Licht, siehe auch Atombombe) zu einem Bruchteil weniger als die Summe seiner Teile. Ein ganz klein wenig Masse geht Atomen sogar durch chemische oder physikalische Bindungen verloren. Die Effekte sind allerdings so klein, dass sie für die Praxis nicht hinreichend wichtig sind, als dass man Studenten der Ingenieurwissenschaften mit diesem Wissen belästigen sollte.

Die Ladung ist also eine strikte Erhaltungsgröße. Selbst auf kurzen Zeitskalen kommt es nicht zu Schwankungen, wie z.B. bei der Energie, die in Folge der Unschärferelation, auch in einem abgeschlossenen System nicht erhalten ist. So kann bei einer Vakuum-Fluktuation zwar sowohl Energie als auch ein e^- erzeugt werden, allerdings wird mit dem e^- auch immer gleichzeitig sein Antiteilchen erzeugt. Letzteres heißt Positron oder e^+ .

Zusatzwissen: Auch wenn das Positron in diesem Kurs keine große Rolle spielen wird, soll dennoch kurz etwas zu seiner Historie und seiner Verwendung gesagt werden. Achtung naturwissenschaftliche Allgemeinbildung! Das Teilchen wurde von dem britischen Physiker Paul Dirac 1928 aus rein theoretischen Betrachtungen vorhergesagt. In seiner Gleichung konnten Lösungen mit negativer Energie nicht wegdiskutiert werden und diese Lösungen verhielten sich genau wie Elektronen, allerdings mit entgegengesetzter Ladung. Vier Jahre später gelang der experimentelle Nachweis der e^+ in der kosmischen Strahlung. Antimaterie, insbesondere das e^+ , ist also keine Science Fiction sondern gibt es wirklich. Positronen entstehen in einer Reihe von Prozessen, so zum Beispiel beim Zerfall von Atomkernen. Solange sie auf kein e^- treffen, sind sie stabil und zerfallen oder zerstrahlen nicht. Dadurch finden sie bei bildgebenden Verfahren sowohl in der Medizintechnik (Positron-Emissions-Topographie bzw. PET Scan) sinnvolle Anwendung als auch in der Materialwissenschaft (Positron-Annihilation-Spektroskopie zur zerstörungsfreien Untersuchung von Materialdefekten).

1.2 Das Coulomb Gesetz

Das coulombsche Gesetz beschreibt die Kraft zwischen zwei Punktladungen oder, etwas allgemeiner, zwischen zwei kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen. Wie auch im newtonschen Gesetz ist die Kraft $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$, die eine Ladung Q_1 durch eine andere Ladung Q_2 erfährt, invers proportional zu dem Quadrat des Abstand r_{12} der Ladungen, sodass

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (1.1)$$

Hierbei ist

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

die elektrischen Feldkonstante und $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Beachten Sie bitte bei Gleichung (1.1) insbesondere, dass es ein anderes Vorzeichen hat als das newtonsche Gravitationsgesetz.

Elektrische Kräfte sind sehr viel stärker als die Gravitation. Als einfachen Vergleich kann man das Verhältnis der Stärke der anziehenden Gravitationskraft $\mathbf{F}_G$ zwischen zwei Protonen und der abstoßenden elektrischen Coulombwechselwirkung $\mathbf{F}_C$ bilden:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_G| &= G \frac{m_p^2}{r_{21}^2} \\ |\mathbf{F}_C| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_{12}^2} \\ \rightarrow \frac{|\mathbf{F}_C|}{|\mathbf{F}_G|} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_{12}^2} \cdot \frac{r_{21}^2}{Gm_p^2} = 1,24 \cdot 10^{36}. \end{aligned}$$

Die Coulombkraft zwischen zwei Protonen der Ladung $+e$ ist somit um einen Faktor 10^{36} stärker (man sagt auch 36 *Größenordnungen* stärker) als die Gravitationen zwischen ihnen. Für zwei Elektronen wäre das Verhältnis sogar noch drei Millionen mal größer. Warum unsere Welt nach dem Föhnen im Winter, wenn unsere Haare elektrisiert in die Höhe stehen (also nicht bei mir, aber bei Ihnen!), nicht völlig aus den Fugen gerät, ist also gar nicht so leicht zu verstehen.

Für die Kraft, die mehrere Punktladungen oder gar ganze Ladungsverteilungen auf eine Probeladung ausüben, gilt das Superpositionsprinzip (1.2). Gegeben sei eine Ansammlung von n

Punktladungen Q_i am Ort $\mathbf{r}_i$, wobei $i = 1, 2, \dots, n$ ist. Man betrachtet nun eine dieser n Ladungen mit Index j . Die Kraft, welche diese Ladung Q_j aufgrund der restlichen $n - 1$ Ladungen erfährt, beträgt dann:

$$\mathbf{F}_j = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{i \rightarrow j} = \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ji}^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}}. \quad (1.2)$$

Das Zeichen $\sum_{i \neq j}$ bedeutet hier, dass über alle Ladungen $i = 1, \dots, n$ summiert wird, mit Ausnahme von j , weil eine Ladung sich selbst schließlich nicht anziehen kann. $\mathbf{F}_{i \rightarrow j}$ ist die Kraft, welche die i 'te Ladung auf die j 'te Ladung ausübt.

Dank des Superpositionsprinzips kann man ausrechnen, wie groß die Kraft einer gegebenen *Ladungsverteilung* auf eine *Probeladung* ist. Dazu diskutieren wir jetzt zwei Beispiele.

Beispiel 1: Berechnung der Gleichgewichtslage von Ladungen

Gegeben seien zwei Ladungen:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -5 \cdot e & \mathbf{r}_1 &= (0, 0, 0) \\ Q_2 &= -3 \cdot e & \mathbf{r}_2 &= (10, 0, 0) \text{ nm.} \end{aligned}$$

Gibt es eine Stelle $\mathbf{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, an der die Kraft auf eine dritte Ladung Q_3 verschwindet?

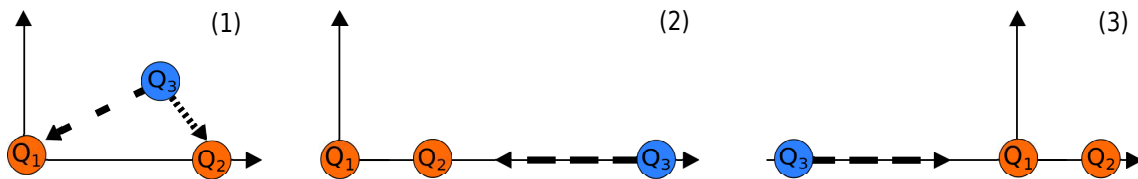


Abb. 1.1: Die Ladungen Q_1 und Q_2 befinden sich auf der x -Achse, Q_1 direkt im Ursprung. Fall (1): Q_3 liegt außerhalb der x -Achse. Fall (2): Q_3 liegt auf der x -Achse sehr weit rechts von Q_2 . Fall (3): Q_3 liegt auf der x -Achse sehr weit links von Q_1 .

Gesucht ist also eine Position des *Kräftegleichgewichts*. Zum Auffinden der Lösung suchen wir zunächst einmal nach Symmetrien in der Problemstellung. Das Abklopfen nach Symmetrien fällt anfänglich schwer, genauso wie Einheiten oder Aufräumen, kann aber später unser Leben ungemein erleichtern.

Da beide Primärladungen positiv sind und auf der x -Achse liegen, würde ein von null verschiedener Wert der y oder z Komponente (Fall 1) unserer *Probeladung*¹ sofort zu einer Anziehung hin bzw. Abstoßung weg von der x -Achse führen, je nachdem ob Q_3 positiv oder negativ ist. Damit kann die Gleichgewichtsposition nur auf der x -Achse selbst liegen und das Gleichgewicht lediglich *metastabil* sein. Ist $x_3 > 10$ nm kann die Summe der Kräfte nur nach “rechts” wirken und für $x_3 < 0$ nur nach “links” wenn Q_3 negativ ist und jeweils in die andere Richtung für $Q_3 > 0$. Deshalb können etwaige Gleichgewichtspositionen nur im Bereich $0 < x_3 < 10$ nm liegen.

Um unser Leben zu vereinfachen, wählen wir uns ein neues Einheitensystem, in dem die Elementarladung auf eins gesetzt wird (macht ja auch Sinn!), nm die Einheit der Länge ist

¹Der Begriff der Probeladung oder auch Testladung soll suggerieren, dass die (in einem Experiment) platzierte Ladung so klein ist, dass sie nicht zu einer wesentlichen Änderung der vorgegebenen Ladungen oder Ladungsverteilung führt.

(warum nicht?). Zudem können wir $e^2/(4\pi\epsilon_0\text{nm}^2)$ als Einheit der Kraft wählen, sodass wir den lästigen Vorfaktor $1/(4\pi\epsilon_0)$ hier nicht brauchen. In unserem neuen Einheitensystem wenden wir nun das Superpositionsprinzip an, wobei ein Strich an den Variablen klarstellen soll, dass wir in dem neuen Einheitensystem arbeiten. Oben haben wir festgestellt, dass $0 < x'_3 < 10$.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_{Q_1 \rightarrow Q_3} &= -\mathbf{F}'_{Q_2 \rightarrow Q_3} \\ \frac{-5e \cdot Q_3}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}'_1|^3} &= \frac{+3e \cdot Q_3}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}'_2|^3} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Durch die Betragsstriche ist das Kürzen der Brüche allerdings nur erlaubt, wenn wir uns über die Vorzeichen der Summanden im Klaren sind. Deshalb gilt hier:

$$\frac{(x'_3 - x'_2)}{|x'_3 - x'_2|^3} = \frac{-1}{(x'_3 - x'_2)^2}, \quad (1.4)$$

da der linke Term negativ ist nach unseren Annahmen. Wie bereits oben diskutiert liegt Q_3 auf der x -Achse, weshalb wir von $\mathbf{r}$ auf x wechseln.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{5e \cdot Q_3}{(x'_3 - 0)^2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3e \cdot Q_3}{(x'_3 - 10)^2} \\ \frac{5}{x_3'^2} &= \frac{3}{x_3'^2 - 20 \cdot x'_3 + 100} \\ 3 \cdot x_3'^2 &= 5 \cdot x_3'^2 - 100 \cdot x'_3 + 500 \\ x_3'^2 - 50 \cdot x'_3 + 250 &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösungen $x'_3 \approx 5,635$ bzw. $x'_3 \approx 44,365$. Da unser Lösungsweg aber vorausgesetzt hat, dass $0 < x'_3 < 10$ und wir Lösungen außerhalb dieses Wertebereichs mit Symmetriegründen verworfen haben, gilt nur die erste der beiden Lösung. Es sei angemerkt, dass sich die Gleichgewichtsposition einer Ladung im Feld mehrerer anderer Ladungen in der Regel nicht analytisch berechnen lässt. Dies liegt daran, dass man die Gleichungen für die Gleichgewichtskoordinaten nur selten auf eine quadratische Form reduzieren kann. Andernfalls muss das Problem numerisch gelöst werden. In Hausaufgaben oder Klausuren beschränken wir uns aber in aller Regel auf Probleme, die sich durch Ausnutzen der Symmetrie sowie der Anwendung des coulombschen Gesetzes und Vektoraddition lösen lassen.

Beispiel 2: Kraft eines homogen geladenen Drahtes auf eine Punktladung

Bisher wurden nur diskrete Ladungen untersucht. Das Superpositionsprinzip gilt aber auch bei kontinuierlichen Ladungsverteilungen. Im folgenden Beispiel soll daher die Kraft berechnet werden, die ein auf der z -Achse liegender, unendlich langer Draht mit homogener *Linien-Ladungsdichte* λ auf eine Testladung q ausübt, siehe Abb. 1.2. Dazu aber zunächst zu dem Begriff **Ladungsdichte**.

Wie bei Massen auch, kann man eine räumliche (elektrische) Ladungsdichte oder Raumladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ definieren, die besagt, wieviel Ladung ΔQ (statt Masse) in einem Volumenelement ΔV , das am Ort $\mathbf{r}$ zentriert sei, vorhanden ist. Also

$$\rho(\mathbf{r}) \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta V} \text{ ausgewertet am Ort } \mathbf{r}. \quad (1.5)$$

Als Beispiel betrachten wir eine Kugel mit Ladung Q und Radius R . Da sich ihr Volumen zu $V = 4\pi R^3/3$ ergibt, ist die mittlere Dichte $\rho = Q/V = 3Q/4\pi R^3$. Ist die Ladungsdichte konstant, herrscht die soeben berechnete Ladungsdichte überall lokal vor. Analog kann man eine Oberflächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ einführen, wenn die Ladung sich, wie z.B. bei Metallen der Fall, primär auf der Oberfläche tummelt:

$$\sigma(\mathbf{r}) \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta A} \text{ ausgewertet am Ort } \mathbf{r}, \quad (1.6)$$

wobei ΔA ein Flächenelement ist. Bei einer Metallkugel wäre somit die Gesamtladung $Q = 4\pi\sigma R^2$ homogen über die Oberfläche verteilt. Ganz analog dazu, das haben Sie sich vielleicht schon gedacht, gibt es auch die Linien-Ladungsdichte

$$\lambda(\mathbf{r}) \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta l} \text{ ausgewertet am Ort } \mathbf{r}, \quad (1.7)$$

die besagt, wieviel Ladung ΔQ auf einem Draht-Segment der Länge Δl residiert, wobei der Draht als infinitesimal dünn genähert ist. Die Einheiten der entsprechenden Ladungsdichten ergeben sich zwanglos aus ihren Definitionen, so z.B. $[\lambda] = \text{C/m}$.

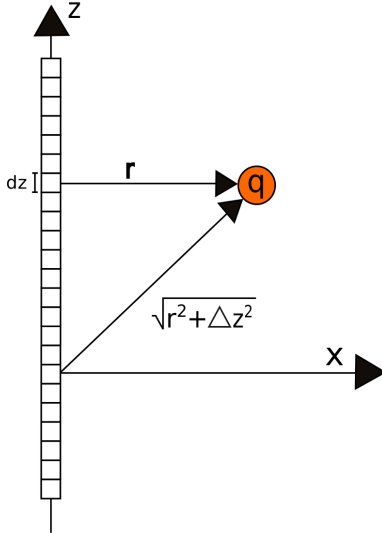


Abb. 1.2: Darstellung eines Drahtes, der in kleine Elemente zerlegt ist und auf der z -Achse liegt, sowie einer Punktladung im Abstand r .

Zurück zu unserem homogen geladenen Draht, für den die Ladungsdichte auf der z -Achse konstant sei, sodass $\lambda(z) = \lambda_0$. Da der Draht als unendlich lang genähert ist, wählen wir für unsere Rechnung ein Koordinatensystem, in dem unsere Testladung in die xy -Ebene liegt, sodass $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ ist. Wenn wir den Draht nun in kleine Segmente der Länge Δz zerlegen, sodass $z(n) = n\Delta z$ und die Ladung eines Segmentes $\lambda\Delta z$, wirkt jedes Drahtelement mit der Kraft

$$\Delta F_{n \rightarrow q} = \frac{q\lambda\Delta z}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - z(n)\mathbf{e}_3}{|\mathbf{r} - z(n)\mathbf{e}_3|^3} \quad (1.8)$$

auf die Probeladung q .

Bevor wir die einzelnen Beiträge zur Gesamtkraft aufaddieren, stellen wir fest, dass die resultierende Gesamtkraft keine Komponente in z Richtung haben kann, da sich die entsprechenden Beiträge der Segmente $+n$ und $-n$ gegenseitig auslöschen. Die verbleibende Komponente der Gesamtkraft zeigt also parallel zu $\mathbf{r}$. Somit ergibt sich die Gesamtkraft $\mathbf{F}$ auf q zu

$$\mathbf{F}_q = \frac{q\lambda\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta z \frac{1}{\sqrt{r^2 + z(n)^2}^3}. \quad (1.9)$$

In der Mathematik haben wir (hoffentlich) gelernt, dass man Summen wie in Gleichung (1.9) als Integral²

$$\mathbf{F}_q = \frac{q\lambda\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} \quad (1.10)$$

ausdrücken kann.

Selbst wenn wir das Integral nicht lösen könnten, würden wir dennoch einiges lernen, indem wir das Integral entdimensionalisieren. Dazu drücken wir z in Einheiten von r aus, da r schließlich die einzige charakteristische Größe der Einheit Länge im gegebenen Problem ist. Jede andere Wahl ist sozusagen völlig unmotiviert. Also substituieren wir

$$z' = z/r, dz = r \cdot dz',$$

sodass

$$\mathbf{F}_q = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}^3}}_{\text{Integral } I \text{ ist einheitenlos!}}. \quad (1.11)$$

Wir kennen somit zwar noch keinen Vorfaktor, dafür aber die Gesetzmäßigkeit für die Kraft zwischen einer Punktladung und einem unendlich langen Draht mit homogener Ladungsdichte: Der Betrag der Kraft fällt invers proportional zum Abstand ab – und nicht wie bei Punktladungen mit seinem Quadrat. Aber Hand aufs Herz: Das war Ihnen aufgrund einer heimlich durchgeführten Einheitenanalyse bereits von Anfang an bewusst. Oder?

Bleibt noch das Integral I zu lösen. Entweder sind wir richtig gut in Mathe und sehen, dass die Substitution $z' = \sinh(y)$ uns weiterhilft, oder wir haben ein sagenhaft gutes Gedächtnis und erinnern uns daran, dass $z'/\sqrt{1 + z'^2}$ die Stammfunktion des Integranden ist, oder wir kramen – ganz altmodisch – irgendwelche geerbten bzw. auf Flohmärkten käuflich erworbenen Integraltabellen hervor oder wir befragen das Internet z.B. unter www.integralrechner.de oder www.wolframalpha.com. Das Ergebnis ist wie so oft eine Zahl zwischen $1/(2\pi)$ und 2π . Um genau zu sein $I = 2$. Damit haben wir als schön kompaktes Endergebnis

$$\mathbf{F}_q = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^2}. \quad (1.12)$$

Nachbetrachtungen zu Beispiel 2

Implizit haben wir zwei wichtige Näherungen vorgenommen: $R_{\text{Draht}} \ll r$ und $r \ll L_{\text{Draht}}$. Idealisierungen dieser Art sind wichtig, da man sonst quasi nichts analytisch ausrechnen könnte.

Zudem ist die Rechnung nur gültig, wenn der kürzeste Abstand zu dem Draht r sehr viel größer ist als der Abstand $r_{q\text{-end}}$ zwischen q und dem näheren Drahtende.

Führende Korrekturen zu der eben durchgeführten Rechnung hätten im schlimmsten Fall die Ordnung $\epsilon_1 = R_{\text{Draht}}/r$ bzw. $\epsilon_2 = r_{q\text{-end}}/L_{\text{Draht}}$. Unsere Idealisierung bewirkt also einen *kontrollierbaren* Fehler. Sprich, wir sollten in einem geeignet durchgeführten Experiment – sei es im miefigen Labor oder etwas eleganter *in-silico*, also numerisch mit Hilfe einer Computersimulation – je näher an unsere analytische Lösung kommen desto kleiner ϵ_1 und ϵ_2 sind.

Auch wichtig: Man sollte sicherstellen, dass die Summe bzw. das Integral definiert ist. Hätten wir eine Funktion integriert, die für große z mit lediglich mit $1/z$ (wie die potenzielle Energie) – oder langsamer verschwindet – wäre das Integral divergiert. Das muss zwar nicht weiter

²Wir schreiben das Differenzial, also dz , direkt hinter dem Integralsymbol. Diese Schreibweise birgt Vorteile bei mehrdimensionalen Integralen.

schlimm sein, wenn man kein Problem damit hat, *Differenzen* zwischen zwei verschiedenen Unendlichen zu bilden. Mathematische Puristen sehen zuweilen eine solche Differenzbildung jedoch als problematisch an.

Schlussendlich: Wie macht man das mit der Symmetrie systematisch? Wir wenden eine Symmetrieoperation an – in diesem Fall eine Spiegelung des Drahts an der xy Ebene, die die Ladungsverteilung auf sich selbst abbildet. Damit muss auch der Kraftvektor auf die Probeladung nach der Spiegelung wieder derselbe sein wie vor der Spiegelung. Spiegelung des Kraftvektors an der xy -Ebene: $(F_x, F_y, F_z) \rightarrow (F_x, F_y, -F_z)$. Weil beide Vektoren aber identisch sein müssen folgt $F_z \stackrel{!}{=} -F_z$ bzw. $F_z = 0$. Somit können wir uns bei der Berechnung der Kraft auf die Vektorkomponenten senkrecht zur z -Achse konzentrieren.

1.3 Das elektrische Feld

1.3.1 Das elektrische Feld allgemeiner Ladungsverteilungen

Im letzten Abschnitt wurde das Coulomb Gesetz eingeführt, mit dem sich die elektrostatischen Kräfte zwischen Ladungen berechnen lassen. Mit Hilfe des Superpositionsprinzip können auch kompliziertere Anordnungen systematisch untersucht werden.

Eine vorhandene Ladungsverteilung bewirkt eine Kraft auf eine zusätzliche Probeladung, welche proportional zur Probeladung ist. Um die Wirkung einer Ladungsverteilung unabhängig von der Probeladung beschreiben zu können, führt man das elektrische Feld ein. Es ist definiert als Coulomb-Kraft $\mathbf{F}$ pro Ladung q :

$$\mathbf{E} := \frac{\mathbf{F}}{q} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot q \quad (1.13)$$

Die Kraft, die eine eine Ladung in einem elektrischen Feld erfährt, ist also gegeben durch die Ladung q multipliziert mit dem vorhandenen elektrischen Feld. Setzt man die Formel für die Coulomb-Kraft (1.2) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{q} \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i \cdot q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \\ &= \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ definiert also die Coulomb-Kraft, welche eine Einheitsladung (nicht zu verwechseln mit Elementarladung!) erfahren würde, wenn sie sich im Punkt $\mathbf{r}$ befände. Da das elektrische Feld (1.14) mathematisch äquivalent zur Coulomb-Kraft ist, gilt auch hier das Superpositionsprinzip. Das elektrische Feld hat die Einheit Volt pro Meter, $[E] = \text{V/m}$.

Man kann (Sie können!) zeigen, dass die Komponenten des elektrischen Feldes kontinuierliche Funktion der Ortskoordinaten sind und auch überall differenzierbar, außer an den Stellen, an denen Punktladungen saßen - dort divergiert das elektrische Feld. Positive (negative) Ladungen sind Quellen (Senken) des elektrischen Feldes, wie in Abbildung 1.3 dargestellt.

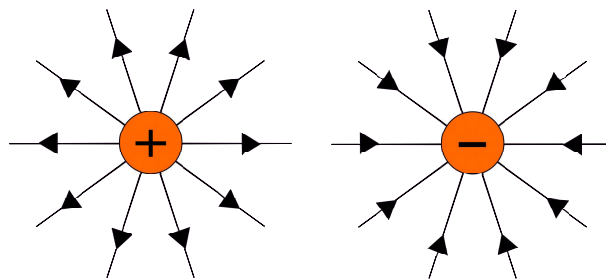


Abb. 1.3: Positive Ladungen sind Quellen, negative Ladungen Senken des elektrischen Felds.

Wie sich aus Gleichung (1.14) ablesen lässt, ist die Richtung des elektrischen Feldes so definiert, dass es in Richtung der Kraft zeigt, die auf eine positive Probeladung ausgeübt würde. Das elektrische Feld gibt also die Richtung an, in welche sich eine positive Probeladung aufgrund der resultierenden Kräfte bewegen würde.

Zur Visualisierung des elektrischen Feldes, welches jedem Punkt $\mathbf{r}$ einen Vektor zuordnet, werden oft Feldlinien verwendet. Es handelt sich hierbei um gedachte Linien, welche die auf

eine Probeladung wirkende Kraft visualisieren. Die Tangente an jedem Punkt gibt die Richtung der Kraftwirkung an, die Dichte der Feldlinien die betragsmäßige Stärke. Feldlinien beginnen in positiven Ladungen und enden in negativen Ladungen. Zusammengefasst ergeben sich die folgenden, **allgemeinen Eigenschaften von Feldlinien**:

- Feldlinien beginnen immer in positiven Ladungen (Quellen) und enden immer in negativen Ladungen (Senken).
- Die Tangente an einem beliebigen Punkt einer Feldlinie gibt die Richtung der Kraftwirkung an, die Dichte der Feldlinien die Stärke des Feldes (wobei das eigentlich niemand vernünftig hinbekommt).
- Feldlinien kreuzen sich nicht, da das elektrische Feld an jedem Punkt im Raum (in dem keine Punktladung sitzt) einen eindeutigen Wert hat und differenzierbar ist.

Beispiel 1: Elektrisches Feld zweier gegensätzlicher Punktladungen

Abbildung 1.4 zeigt das elektrische Feld zweier gegensätzlicher Punktladungen.

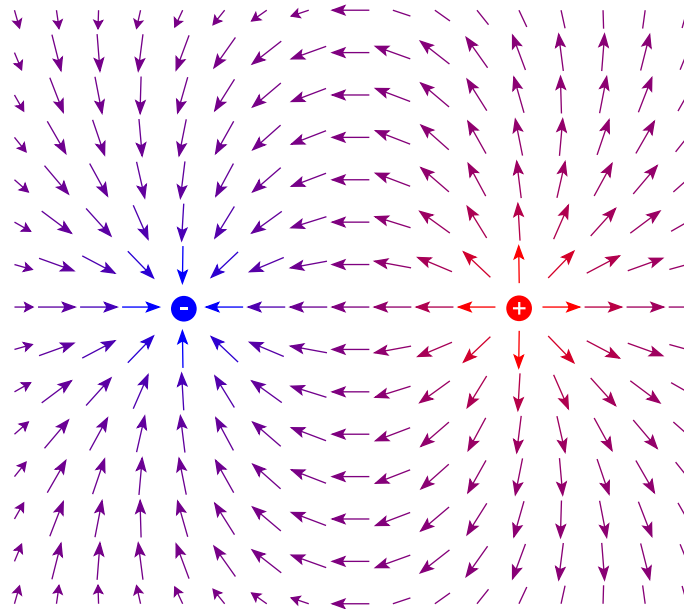


Abb. 1.4: Graphische Darstellung des Vektorfelds zweier Punktladungen mit $q_1 = -q_2$. Die dargestellten Vektoren repräsentieren beispielhaft die Richtung des Feldes an verschiedenen Stellen im Raum.

An dieser Stelle muss man sich klar machen, dass das elektrische Feld ein Vektorfeld ist und somit jedem Punkt im dreidimensionalen Raum einen vektoriellen Wert zuordnet, welcher Stärke und Richtung des Feldes in diesem Punkt angibt. Im Falle von Abbildung 1.4 sind die Vektoren normiert und geben keine Auskunft über die Stärke des Feldes. Eine graphische Darstellung wie in Abbildung 1.4 kann natürlich nur einen endlichen Teil dieser Vektoren darstellen. Trotzdem gibt dieser Teil bereits eine Intuition für den Verlauf der Feldlinien, welche dadurch bestimmt werden, dass die Tangente an jedem Punkt der Feldlinie durch das elektrische Feld gegeben ist. Vereinfacht gesagt folgen Feldlinien den Vektorpfeilen des elektrischen Feldes.

Beispiel 2: Elektrisches Feld einer homogen geladenen Platte

Als weiterführendes Beispiel soll nun das elektrische Feld einer unendlich großen, gleichmäßig geladenen Platte bestimmt werden. Die Platte soll in der yz -Ebene unendlich ausgedehnt und bei $x = 0$ positioniert sein. Gleichzeitig soll sie gleichmäßig geladen sein. Eine unendlich große Platte kann wiederum als eine Ansammlung unendlich vieler geladener Ringe interpretiert werden - ähnlich wie ein Blatt Papier mit einer (endlichen) Anzahl dicht beieinander liegenden Zirkel-Kreise vollständig ausgefüllt werden kann.

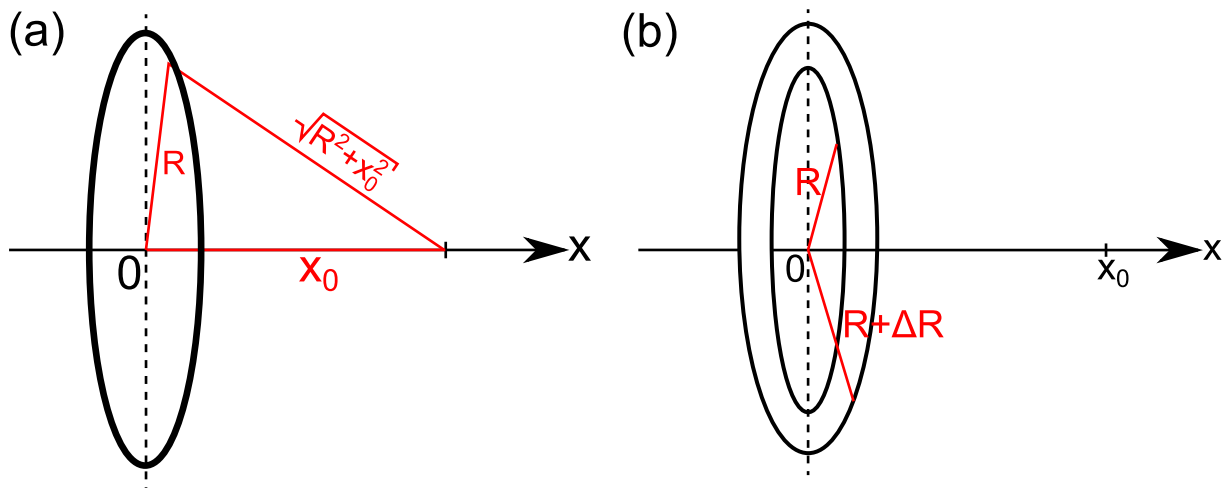


Abb. 1.5: (a): Geometrische Anordnung des Problems eines geladenen Rings, dessen Symmetrieachse die x -Achse ist. (b): Die geladene Platte kann als Ansammlung von Ringen betrachtet werden.

Doch wieso Ringe?

Eine unendlich große, rechteckige Platte ist genau so unendlich weit ausgedehnt wie eine unendlich große Zylinderscheibe, die exakte Form hat bei unendlicher Ausdehnung keinen Einfluss auf das Ergebnis. Das Problem hat jedoch eine Zylindersymmetrie - sprich die Anordnung ist invariant unter Drehung um die Symmetrieachse, welche hier passenderweise durch die x -Achse gegeben ist. Damit vereinfacht sich die Behandlung des Problems enorm. Im Allgemeinen ist es in der Physik immer vorteilhaft, ein Problem unter Ausnutzung aller möglichen Symmetrien zu beschreiben.

Das Feld eines geladenen, unendlich dünnen Rings mit Ladung Q und Radius R auf seiner Symmetrieachse ergibt sich zu (siehe Übung):

$$\mathbf{E}(x_0) = E_x(x_0) \cdot \mathbf{e}_x \quad E_x(x_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot x_0}{(R^2 + x_0^2)^{3/2}}$$

Aufgepasst: Das E -Feld liegt nur in der Summe parallel zur x -Achse. Der Abstand zwischen einem individuellen Oberflächenelement und dem Bezugspunkt beträgt aber $\sqrt{R^2 + x_0^2}$. Wir betrachten nun einen Ring endlicher Breite ΔR als Teil einer Ebene, wie in Abbildung 1.5 (b) dargestellt. Diese Ebene habe eine konstante (Flächen-)Ladungsdichte.

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \text{konst.}$$

Die Ladung auf dem Ring ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned}
\Delta Q &= \sigma(A_{\text{ausen}} - A_{\text{innen}}) \\
&= \sigma (\pi R_{\text{außen}}^2 - \pi R_{\text{innen}}^2) \\
&= \sigma \pi ((R + \Delta R)^2 - R^2) \\
&= \sigma \pi (R^2 + 2R \cdot \Delta R + \Delta R^2 - R^2) \\
&= \sigma \pi (2R \cdot \Delta R + \Delta R^2) \\
&\rightarrow 2\pi R \cdot \Delta R \cdot \sigma \text{ für } \Delta R \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Mit $\Delta Q = \Delta A \cdot \sigma$ identifiziert man die Fläche des Rings in Näherung als Umfang des inneren Rings $U = 2\pi R$ mal seiner Breite ΔR . Damit trägt der Ring mit seinem Radius R und seiner Breite ΔR wie folgt zum elektrischen Feld bei:

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi R \cdot \Delta R \cdot \sigma \cdot x_0}{\left(\sqrt{R^2 + x_0^2}\right)^3} \quad (1.15)$$

Eine unendlich ausgedehnte, geladene Platte kann nun wie beschrieben als eine Ansammlung unendlich vieler solcher Ringe interpretiert werden. Zur Bestimmung des elektrischen Feldes einer solchen Platte muss daher das elektrische Feld dieser unendlich vielen Ringe aufsummiert werden (Superpositionsprinzip). Man führt wie bereits beim geladenen Draht den Übergang von einer Summe zu einem Integral via

$$\sum_{\text{Ringe}} \Delta R \dots \rightarrow \int_0^\infty dR \dots$$

durch. Man findet:

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^\infty dR \frac{x_0 \cdot R}{(R^2 + x_0^2)^{3/2}}$$

Die Substitution $r = R/x_0$ mit $dr = dR/x_0$ macht das Integral einheitenlos.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_x &= \frac{\sigma \cdot \text{sgn}(x_0)}{2\epsilon_0} \int_0^\infty dR \frac{x \cdot R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\sigma \cdot \text{sgn}(x_0)}{2\epsilon_0} \cdot \underbrace{\int_0^\infty dr \frac{r}{(1 + r^2)^{3/2}}}_{= 1 \text{ (dimensionslos)}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \text{sgn}(x_0) \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Der Betrag des elektrischen Feldes hängt also nur von der Oberflächendichte ab, was man auch anhand einer Einheitenanalyse herausbekommen hätte können. Der Vorfaktor von $1/2$ ergibt sich aber nur durch rechnen.

Auch hier sei angemerkt, dass die Annahme einer unendlich ausgedehnten Platte dann gerechtfertigt ist, wenn der Betrag von x_0 klein ist gegenüber dem Radius der Platte als auch verglichen mit dem kürzesten Abstand zum Plattenrand.

Fügt man zwei gegensätzlich geladene Platten zusammen, so ergibt sich die in Abbildung 1.7 dargestellten Feldlinien. Außerhalb des Kondensators löschen sich die Feldlinien der Platten aus.

Im Allgemeinen sind die Platten wie bereits beschrieben endlich, sodass die Homogenität des Feldes nur zwischen den Platten gegeben ist, an den Rändern der Platten kommt es zur

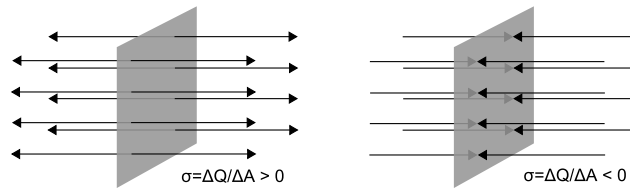


Abb. 1.6: Feldlinienverlauf einer positiv (links) beziehungsweise negativ (rechts) geladenen Platte. Randeffekte sind dabei vernachlässigt.

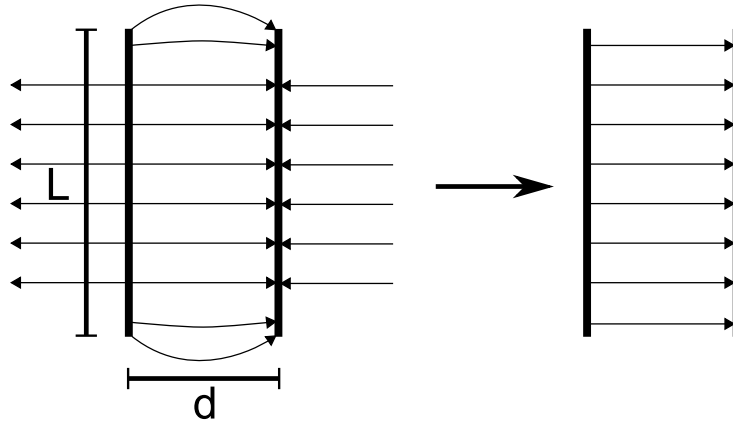


Abb. 1.7: Feldlinienverlauf zweier parallel zueinander im Abstand d aufgestellter, gegensätzlich geladener Metallplatten der Breite L . Vernachlässigt man Randeffekte und die Felder außerhalb der Platten, so ergibt sich der rechts dargestellte ideale Plattenkondensator.

Ausbildung signifikanter Störfelder, welche in der praktischen Anwendung jedoch vernachlässigt werden. Es ergibt sich der ideale Plattenkondensator, bei welchem das gesamte Feld als zwischen den Platten lokalisiert angenommen wird. Es ist dabei homogen, sprich überall im Raum zwischen den Platten herrscht die gleiche Feldstärke, welche nur von der Ladung auf den Platten abhängig ist. Diese Näherung ist vor allem für $L \gg d$ sehr gut erfüllt. Ist $d \gg L$, so können die Störfelder nicht mehr vernachlässigt werden und es ergibt sich ein elektrischer Dipol. In Abbildung 1.8 ist das exakt berechnete Feld zweier parallel gegenüber liegender, gegensätzlich geladener Platten skizziert.

1.3.2 Elektrische Felder an Metalloberflächen

Metalle besitzen eine hohe elektrische Leitfähigkeit, die durch frei bewegliche Elektronen bedingt ist. Liegt ein elektrisches Feld im Metall vor, werden die Elektronen beschleunigt. Die Elektronen erfahren demzufolge so lange eine Beschleunigung, bis ihr Feld (plus das der Ionen) das externe Feld genau kompensiert. Deshalb kann in (abgeschlossenen) Metallen – oder anderen Systemen mit freien Ladungsträgern – kein statisches, elektrisches Feld vorkommen. Aus dieser Betrachtung ergeben sich so einige Konsequenzen, z.B., dass die Ladungen sich an die Oberfläche begeben, weil in einem (isolierten) Metall keine elektrischen Feldlinien erlaubt sind. Gäbe es Ladungen im Inneren des Metalls, würden dort Feldlinien anfangen oder aufhören.

Influenz: Eine ortsfeste Ladungsverteilung in der Nähe eines Leiters bewirkt eine Kraft auf die im Leiter enthaltenen freien Ladungsträger, welche sich in einen Anteil parallel und senkrecht zur Metalloberfläche zerlegen lässt. Der senkrechte Anteil zieht die Ladungsträger an den Rand des Metalls. Dort angekommen kann dieser Anteil die Ladungsträger nicht weiter bewegen. Der parallele Anteil hingegen verschiebt sie so lange gegen die Metallo-

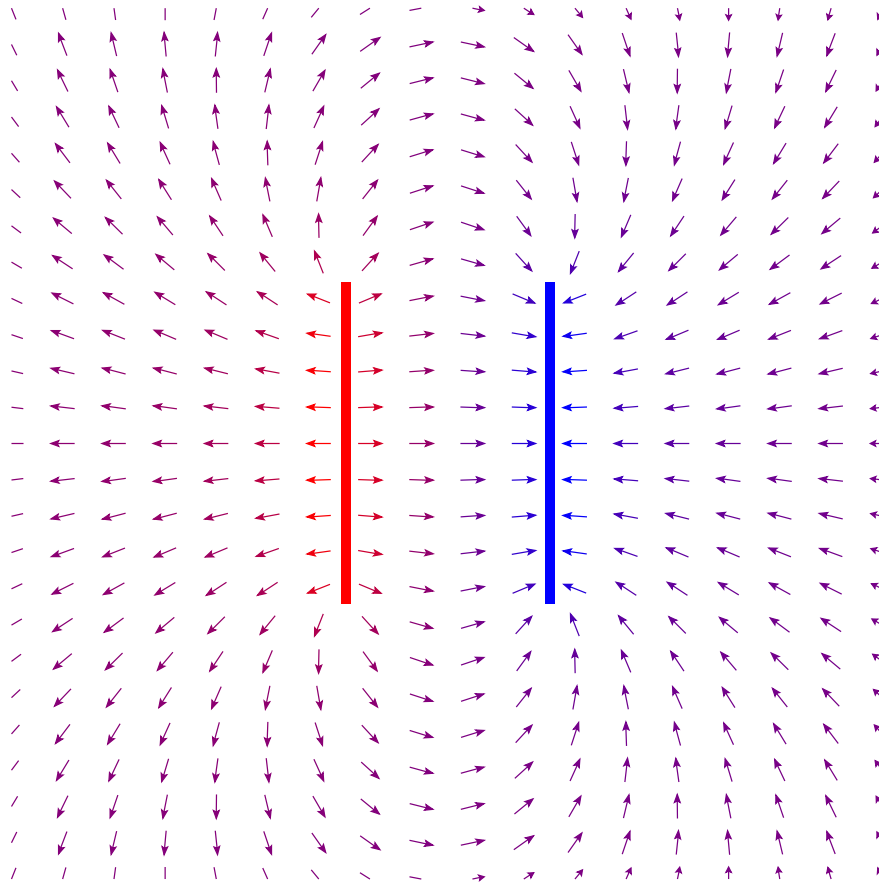


Abb. 1.8: Berechnetes Feld (nur Richtungen!) eines Plattenkondensators. Zwischen den Platten ist das Feld größtenteils homogen. Zum Rand hin erkennt man die beim idealen Kondensator vernachlässigten Inhomogenitäten.

berfläche, bis die wirkende Kraft verschwindet. Die so erhaltene räumliche Verschiebung der Ladung wird *Influenz* genannt – oder manchmal auch *elektrostatische Induktion*. Bei einem Leiter im elektrischen Feld sammeln sich die freien Ladungsträger also immer an der Oberfläche des Leiters.

Das elektrische Feld steht senkrecht auf der Metalloberfläche: Als direkte Konsequenz aus der Influenz steht das elektrische Feld immer senkrecht auf der Metalloberfläche. Da die zur Oberfläche parallele Komponente der Kraft verschwindet, wirkt nur noch eine Kraft senkrecht zur Metalloberfläche auf die Ladungsträger. Da das elektrische Feld in Richtung der wirkenden Kraft zeigt (siehe (1.13)), ist dessen Richtung auf der Metalloberfläche ebenfalls senkrecht zu dieser.

Das Innere eines (stromfreien) Leiters ist feldfrei: Bei der Ausrichtung der Ladungsträger im Leiter (Influenz) erzeugen diese ein elektrisches Feld im Metall, welches das von der äußeren Ladungsverteilung erzeugte elektrische Feld vollständig kompensiert. Daher ist das Innere eines Leiters (egal ob hohl oder massiv) immer feldfrei. Eine solche Anordnung wird auch *Faraday-Käfig* genannt, siehe Abb. 1.9.

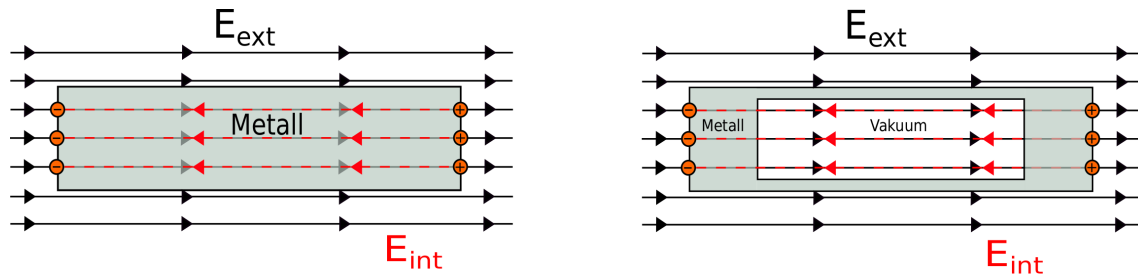


Abb. 1.9: E-Feld links eines massiven, rechts eines hohlen Leiters

1.3.3 Anwendung: Braun'sche Röhre

Eine Anordnung aus zwei planparallelen (metallischen) Platten ist wie bereits beschrieben als Kondensator bekannt. Die sehr gute Homogenität des elektrischen Feldes zwischen den Platten kann genutzt werden, um freie elektrische Ladungen (beispielsweise Elektronenstrahlen) gezielt abzulenken. Jeder Röhrenbildschirm basiert auf diesem Prinzip, das von Karl Ferdinand Braun entwickelt wurde. Die Grundzüge dieser Dynamik sollen hier kurz angerissen werden. Dabei wird nur der Einfluss des Kondensatorfelds auf die freie Ladung untersucht, der umgekehrte Einfluss wird vernachlässigt.

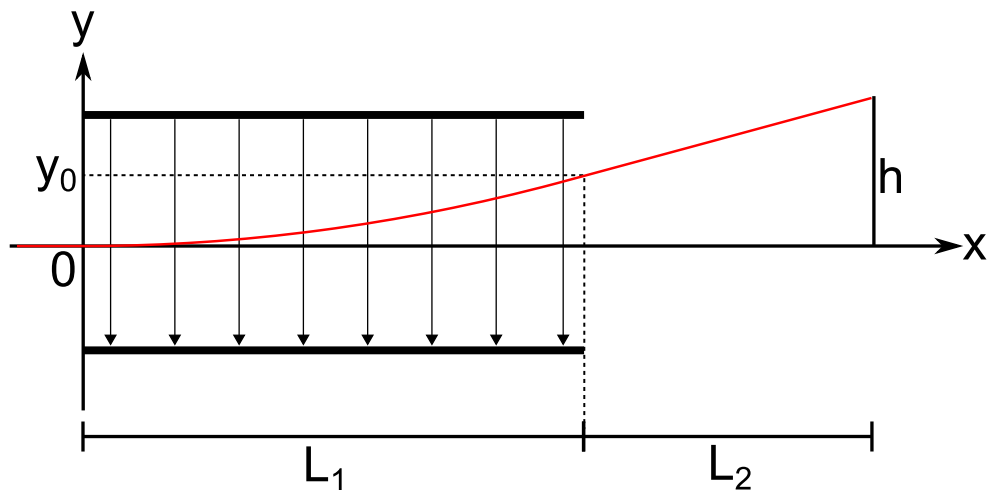


Abb. 1.10: Ein geladenes Teilchen wird in einem Kondensator abgelenkt. Eine typische Fragestellung beinhaltet die Frage, an welcher Position (Höhe h) eines Schirms hinter dem Kondensator das Teilchen auftrifft.

Die Überlegungen sind analog zum freien Fall oder zum schiefen Wurf in der Mechanik, die Situationen ist in Abbildung 1.10 dargestellt. Die typische Fragestellung lautet: Wie hängt die Position h , an der die Ladung auf den Schirm, trifft von L_1, L_2 und der Feldstärke im Kondensator ab?

Als Ladung wird ein Elektron angenommen mit $m = m_e$ und $q = -e$. Die obere Platte des Kondensators sei positiv, die untere negativ geladen. Damit ergibt sich die in Abbildung 1.10 dargestellte Richtung des elektrischen Feldes im Kondensator. Das Elektron trete im Ursprung in den Kondensator ein und habe eine Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung, es gilt also:

$$\mathbf{s}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}(t=0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Kondensator erzeugt ein elektrisches Feld $\mathbf{E} = -E \cdot \mathbf{e}_y$, welches über den gesamten Kondensator und damit über die gesamte Strecke L_1 gleich ist.

Gemäß Gleichung (1.13) bewirkt das elektrische Feld des Kondensator eine Kraft auf das Elektron:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{\mathbf{F}}{q} \\ \Rightarrow \mathbf{F} &= \mathbf{E} \cdot q \\ &= -E \cdot (-e) \cdot \mathbf{e}_y \\ &= e \cdot E \cdot \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

Gemäß Newton gilt:

$$m_e \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} = e \cdot E \cdot \mathbf{e}_y.$$

Damit findet man, dass das Elektron eine Beschleunigung in y-Richtung erfährt, wie in Abbildung 1.10 eingezeichnet. Integriert man die Beschleunigung zwei mal nach der Zeit unter Verwendung der oben gegebenen Anfangsbedingungen, so erhält man:

$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e}{m_e} \cdot E \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\int dt} \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \\ \frac{eE}{m_e} \cdot t \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\int dt} \mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \\ \frac{eE}{2m_e} \cdot t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sobald das Elektron den Kondensator verlässt, verschwindet das elektrische Feld und damit die wirkende Beschleunigung. Das Elektron bewegt sich dann in einer gleichförmig-geradlinigen Bewegung mit der Geschwindigkeit, welches es beim Verlassen des Kondensators inne hat. Die x -Komponente dieser Geschwindigkeit ist mit v_0 bekannt. Die y -Komponente zum Zeitpunkt des Austritts aus dem Kondensator muss jedoch explizit berechnet werden. Dazu löst man zunächst die x -Komponente von $\mathbf{s}(t)$ nach t auf und setzt dieses t dann in die y -Komponente ein:

$$s_x = v_0 \cdot t \Rightarrow t = \frac{s_x}{v_0} \quad \Rightarrow \quad s_y = \frac{eE}{2m_e} \left(\frac{s_x}{v_0} \right)^2.$$

Beim Verlassen des Kondensators ist $s_x = L_1$. Damit ergibt sich für $y_0 = s_y(s_x = L_1)$

$$y_0 = \frac{eE}{2m_e} \left(\frac{L_1}{v_0} \right)^2$$

und für die y -Komponente der Geschwindigkeit beim Austreten aus dem Kondensator

$$v_y(t = L_1/v_0) = \frac{e \cdot E \cdot L_1}{m_e \cdot v_0}.$$

Ab dem Punkt $(L_1, y_0, 0)$ besitzt das Elektron also die konstante Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \frac{eEL_1}{m_e v_0} \\ 0 \end{pmatrix},$$

womit sich für $\mathbf{s}(t)$ die bereits beschriebene geradlinig-gleichförmige Bewegung ergibt:

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t + L_1 \\ \frac{eEL_1}{m_e v_0} \cdot t + y_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass das Koordinatensystem immer noch das selbe ist wie zuvor, daher muss die Position beim Verlassen des Kondensators hinzu addiert werden. Der Abstand zwischen Ausgang Kondensator und Bildschirm ist L_2 . Wieder berechnet man die Flugzeit aus der x -Komponente

$$t = \frac{L_2}{v_0}$$

und setzt diese in die y -Komponente ein. Damit ergibt sich:

$$h = s_y(t = L_2/v_0) = y_0 + \frac{eEL_1L_2}{m_e v_0^2} = \frac{eEL_1}{2m_e v_0^2} \cdot (L_1 + 2L_2)$$

1.3.4 Gaußsches Gesetz

In dieser Vorlesung haben wir die elektrischen Felder von Drähten und Platten ausgerechnet, indem wir ein Ladung-tragendes Objekt in kleine Elemente zerlegt haben und das von jedem Element am Punkt $\mathbf{R}$ erzeugte Feld aufaddiert bzw. integriert haben. Wir haben diese Vorgehensweise gewählt, weil es sich direkt für numerische Berechnungen oder Computersimulationen eignet. Letztere sind immer dann der einzige Weg zum Erfolg, wenn das gegebene Problem keine hinreichend hohe Symmetrie hat, um das Problem analytisch zu lösen. Also eigentlich alle Probleme von praktischem Interesse.

Traditionell berechnet man die elektrischen Felder unendlich langer Drähte oder unendlich ausgedehnter Platten jedoch mit dem gaußschen Gesetz, das mathematisch quasi dieselbe Information beinhaltet wie das coulombsche Gesetz. Um von Kollegen, die noch älter sind als ich, nicht beschimpft zu werden, soll er hier kurz angerissen werden.

Das Feld einer Punktladung genügt der Gleichung:

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Desweiteren berechnet sich die Oberfläche einer Kugel, deren Punkte vom Mittelpunkt den Abstand r haben zu: $A = 4\pi r^2$. Deshalb ist das Produkt aus $E = |\mathbf{E}|$ (auf der Kugeloberfläche, also bei konstantem r) und A :

$$\begin{aligned} E \cdot A &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right) \cdot (4\pi r^2) \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned} \tag{1.17}$$

eine Konstante.

Nun ist $\mathbf{E}$ ein Vektor. Ebenso kann man einen Flächenvektor $\mathbf{A}$ definieren, der senkrecht auf einer Oberfläche eines Objektes (Volumens) steht und von innen nach außen zeigt, z.B. würde man die Oberfläche eines "Deckel" eines Kubus mit Kantenlänge a , der entlang der kartesischen Koordinaten ausgerichtet ist, mit $\mathbf{A}_{\text{Deckel}} = a^2 \mathbf{e}_z$ bezeichnen. Die Oberfläche des "Bodens" wäre dann $\mathbf{A}_{\text{Boden}} = -a^2 \mathbf{e}_z$.

Gekrümmte Oberflächen, wie die einer Kugel, können in kleine Teile zerlegt werden, die dann als lokal eben genähert werden dürfen. Bei einer Kugel wären solche Oberflächensegmente parallel zu $\mathbf{r}$, wenn der Schwerpunkt der Kugel im Koordinatenzentrum liegt. Also ist $d\mathbf{A}$ parallel zu $\mathbf{r}$.

Wir können Gleichung (1.17) sinnvoller schreiben, indem wir kleine Oberflächensegmente betrachten und dann jeweils deren Beiträge $d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$ über die gesamte Kugeloberfläche summieren. Das resultierende Integral schreibt man formal wie folgt:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{eingeschlossen}}. \quad (1.18)$$

Diese Gleichung bezeichnet man auch als das **gaußsche Gesetz**. Dabei bedeutet das Symbol $\oint d\mathbf{A} \dots$ eine Summation bzw. Integration über eine geschlossene Oberfläche, also über die Hülle eines Volumens.

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \Delta A \cdot E \cdot \cos \alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen $\Delta \mathbf{A}$ und $\mathbf{E}$ ist.

Man bezeichnet das Integral $\int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$ über eine offene Fläche A auch als den *elektrischen Fluss* durch die gegebene Oberfläche. Betrachten wir als Beispiel wieder einen Kubus und ein konstantes $\mathbf{E}$ -Feld parallel zur z -Achse, $\mathbf{E} = E_0 \cdot \mathbf{e}_z$. Der elektrische Fluss durch den Boden ist dann $-AE_0$, weil die Oberflächennormale und $\mathbf{E}$ antiparallel sind. Durch die Seiten des Kubus geht kein Fluss, da die Oberflächennormalen der vier Seiten senkrecht zu $\mathbf{E}$ stehen. Der Fluss durch den Deckel ist schließlich $+AE_0$, sodass sich der Gesamtfluss $\oint d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$ durch alle sechs Oberflächen zu null addiert. Der Begriff “Fluss” stammt im Übrigen aus der Strömungslehre, wo man den Begriff dann durchaus wörtlich nehmen darf.

Das Feld einer unendlichen Platte reloaded

Als eins von quasi drei einfachen Anwendungen des gaußschen Gesetzes berechnen wir (zum zweiten Mal in diesem Kapitel) das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten Platte. Homogen geladene Kugeln oder Drähte eignen sich dann für Aufgaben an anderer Stelle.

Betrachten wir Abb. 1.11. Die z -Achse liege parallel zur Oberflächennormalen. Aus Symmetriegründen zeigt dann das $\mathbf{E}$ -Feld auch in z -Richtung. Somit tritt kein Fluss durch die Seitenwände der “Pillendose” aus, sodass $\int_{\text{Seitenwände}} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = 0$. In Deckel und Boden steht $\mathbf{E}$ parallel zu den jeweiligen Oberflächennormalen.

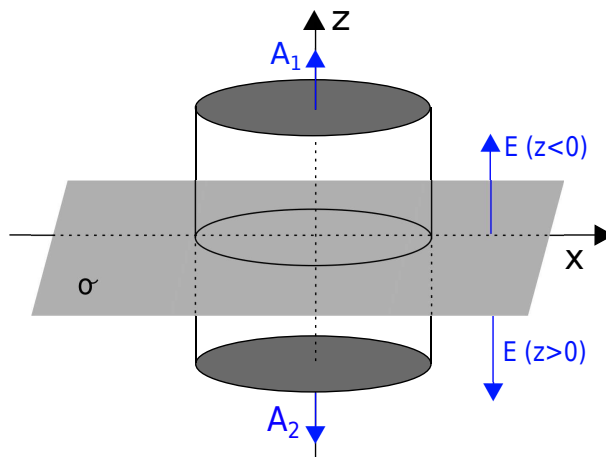


Abb. 1.11: Pillendosen-Integration des elektrischen Feldes einer ausgedehnten Platte mit positiver, homogener Ladungsdichte σ .

Unter diesen Betrachtungen wird

$$\int_{\text{Boden}} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \int_{\text{Deckel}} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = A|E_z|, \quad (1.19)$$

wobei A die Grundfläche der Pillendose sei und damit

$$\oint d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = 2A|E_z| \quad (1.20)$$

Gleichzeitig ist die eingeschlossene Ladung

$$Q_{\text{eingeschlossen}} = A\sigma. \quad (1.21)$$

Setzen wir die beiden letzten Gleichungen in das gaußsche Gesetz ein, kürzt sich die Fläche A raus, sodass unter Berücksichtigung der Richtung des $\mathbf{E}$ Feldes

$$\mathbf{E} = \text{sgn}(z) \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_3. \quad (1.22)$$

Dies ist im Wesentlichen das gleiche Ergebnis wie in Gleichung (1.16), nur dass wir diesmal die Symmetrieachse nicht parallel zur x -Achse sondern zur z -Achse gelegt haben.

Prinzipiell ist die auf dem gaußschen Gesetz basierende Rechnung für die unendliche Platte einfacher als das explizite Integrieren über die Ladungsverteilung. Letztere Methode ließe sich – im Gegensatz zum gaußschen Gesetz – aber auch dann zwanglos anwenden, wenn man das Feld auf der Symmetrieachse eines *endlichen* Kreises berechnen wollte.

1.4 Elektrisches Potenzial und potenzielle Energie

In der Mechanik wurde die potenzielle Energie eines Massepunktes als Gradient der potenziellen (Gravitations-) Energie beschrieben. Sie ist sozusagen die Stammfunktion zu der konservativen Gravitations-Kraft. Da die elektrostatische Kraft dieselbe Abhängigkeit vom Abstand zweier geladener Punkte hat wie die Gravitationskraft zwischen zwei Massepunkten, lassen sich die Ergebnisse aus der Mechanik auf die Elektrostatik durch die Substitution $Gm_1m_2 \rightarrow Q_1Q_2/(4\pi\epsilon_0)$ übertragen. Somit beträgt die potenzielle Energie zweier Ladungen Q_i und Q_j

$$V_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{R_{ij}}. \quad (1.23)$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung lässt sich durch Gradientenbildung verifizieren. Die Kraft, die Q_i auf Q_j ausübt, ergibt sich in der Tat durch $\mathbf{F}_{j \rightarrow i} = -\nabla_i V_{ij}$, wobei $\nabla_i = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \cdot \partial/\partial_{i\alpha}$ der Nabla-Operator bzw. den Gradienten-Operator darstellt, siehe auch der mathematische Einschub in Kapitel 1.4.1.

Für ein System aus vielen Ladungen müssen wir über alle Paare i, j addieren, um die gesamte elektrische potenzielle Energie zu erhalten, also

$$V_{\text{tot}} = \sum_{i,j>i} V_{ij}. \quad (1.24)$$

Die Summe wird auf $j > i$ beschränkt, damit wir keine Paare doppelt zählen und keine Selbstwechselwirkung einführen. Gleichung (1.24) gilt im Übrigen für alle Paar-Wechselwirkungen.

Wir können nun die Frage beantworten, wieviel potenzielle Energie man gewinnt oder verliert, wenn eine (Test-) Ladung Q von unendlich an den Ort $\mathbf{R}$ gebracht wird, in dessen Nähe sich eine Ladungsverteilung $(Q_1, \dots, Q_n)$ befindet:

$$V = Q \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|} \quad (1.25)$$

Die potenzielle Energie ist offensichtlich proportional zu Q . Die Summe in Gleichung (1.25) hängt aber nicht von der Größe der (Test-) Ladung Q ab. Die Summe

$$\Phi(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|}. \quad (1.26)$$

bekommt deshalb den eigenen Namen **elektrisches Potenzial**. Es ist lediglich eine (skalare) Funktion des Ortes und der ursprünglichen Ladungsanordnung, aber es ist unabhängig von Q .

Wir bemerken natürlich sofort, dass wir der Berechnung elektrischer Felder in Zukunft weniger Arbeit machen müssen. Bisher haben wir prinzipiell drei Integrale lösen müssen, auch wenn der Dozent meist die Freudlichkeit besaß, nur solche Aufgaben zu stellen, in denen aus Symmetriegründen zwei Komponenten verschwanden. Das wirkliche Leben ist meist nicht so nett, sodass man drei Integrale lösen muss, oder aber eben alternativ ein Integral für $\Phi(\mathbf{R})$ und einen Gradient, denn

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = -\nabla\Phi(\mathbf{R}), \quad (1.27)$$

wie man selbst nachrechnen kann.

Da Ableiten in aller Regel sehr viel leichter ist als Integrieren, ist es oft zeitsparend zunächst das Potenzial zu berechnen und dann dessen (negativen) Gradienten zu bilden. Es ist eine hervorragende Übung dieses im Fall eines homogenen geladenen Drahtes durchzuexerzieren.

Die elektrische Potenzialdifferenz zwischen zwei Punkten heißt auch **elektrische Spannung**. Die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten a und b ist somit

$$U_{ab} = \Phi(\mathbf{R}_b) - \Phi(\mathbf{R}_a). \quad (1.28)$$

Die elektrische Spannung hat im Gegensatz zur Spannung, mit der Sie dieses Skript lesen, eine S.I. Einheit. Sie heißt Volt:

$$[U] = \text{V} = \text{J/C}.$$

Die Spannung U_{ab} ist die Arbeit je Einheitsladung, die man an einer Testladung verrichten muss, um sie quasistatisch³ von a nach b zu bewegen.

Im letzten Satz haben wir den aus der Mechanik vertrauten Begriff der Arbeit verwendet. Dazu ein paar Bemerkungen. In der Mechanik heißt es, dass die Arbeit, die *wir* leisten, wenn wir einen Massepunkt um einen Vektor $d\mathbf{r}$ verschieben, durch

$$dW = \mathbf{F}_{\text{wir}} \cdot d\mathbf{r}$$

gegeben ist, wobei $\mathbf{F}_{\text{wir}}$ die Kraft ist, die wir auf den Massepunkt ausüben. Wenn wir uns also parallel zur Erdoberfläche bewegen, oder Ladungen senkrecht zu den $\mathbf{E}$ -Feld Linien, dann verrichten wir keine Arbeit gegen das Gravitations- bzw. das elektrische Feld. Es zählt also immer die Komponenten parallel zur Erdbeschleunigung oder parallel zum elektrischen Feld. Da im quasistatischen Fall die Kraft, die das konservative Potenzial auf den Massenpunkt ausübt, unserer Kraft genau entgegenwirkt gilt

$$\mathbf{F}_{\text{Potenzial}} + \mathbf{F}_{\text{wir}} = 0,$$

sodass

$$dW = -\mathbf{F}_{\text{Potenzial}} \cdot d\mathbf{r}.$$

Die Vorzeichenwahl der Gleichung $dW = \pm \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ist also gerne etwas verwirrend.

Beispiel: Punktmasse im Schwerfeld

Ein klassisches Beispiel zur Bestimmung der potenzielle Energie ist ein Massepunkt der Masse m im Schwerfeld der Erde, welches man in der Nähe der Erdoberfläche als konstant annehmen kann. Das Schwerfeld bewirkt (wie aus der Einleitung bekannt) eine Kraft auf den Massepunkt:

$$\mathbf{F} = -m \cdot g \cdot \mathbf{e}_z$$

Hierbei ist $g = 9,82 \text{ ms}^{-2}$ die Erdbeschleunigung.

Die potenzielle Energie, welche diese Kraft bewirkt, ist gegeben durch:

$$V(x, y, z) = m \cdot g \cdot z + V_0$$

Die Koordinate z ist wie aus Abbildung 1.12 ersichtlich die Höhe des Massepunkts über dem Erdboden, welcher auf $z = 0$ festgelegt ist. Als “Beweis” dieser Formel für die potenziellen

³Der Begriff “quasistatisch” soll implizieren, dass keine Reibungsverluste auftreten und die kinetische Energie der Testladung sich nicht ändert.

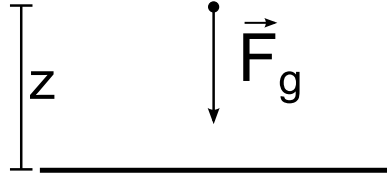


Abb. 1.12: Wirkende Kraft auf eine Punktmasse im Abstand z über dem Erdboden.

Energie dieses Beispiels bildet man die partielle Ableitung in alle drei Raumrichtungen:

$$F_x = - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta z} \Big|_{x,y=\text{const}} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$F_y = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -m \cdot g$$

Insgesamt gilt also wie erwartet $\mathbf{F} = -m \cdot g \cdot \mathbf{e}_z$. Die Konstante V_0 muss willkürlich bestimmt werden, z.B. je nach Wahl des Koordinatensystems. Ihr Wert hat aber keinerlei Relevanz für die Kräfte.

Allgemein bezeichnet man alle Punkte gleicher potenzieller Energie als Äquipotenzialflächen. In unserem Beispiel wäre das eine unendliche große Anzahl von ebenen Flächen, eine Fläche für jedes $z > 0$. Tatsächlich jedoch sorgen lokale Schwankungen im Wert von g für geringfügig ausgebeulte Äquipotenzialflächen. Analoge Betrachtungen gelten beispielsweise für ein Teilchen vor einer homogen geladenen Platte (Kondensator).

1.4.1 Mathematischer Einschub: Gradient

Der Gradient ist die Verallgemeinerung der Steigung auf höhere Dimensionen. Er gibt neben dem Betrag der maximalen Steigung einer (skalaren) Funktion $f(x_1, x_2, \dots)$ auch die Richtung an. Der Gradient einer Potenzialfunktion steht somit senkrecht zu den Äquipotenziallinien.

Der Gradient berechnet sich – so er definiert ist – indem zunächst die *partiellen* Ableitungen gebildet werden, die für x_1 wie folgt definiert ist:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x, x_2, \dots) - f(x_1, x_2, \dots)}{\Delta x}. \quad (1.29)$$

Die partielle Ableitung nach x_2 – bzw. nach y – erfolgt dann analog.

Die partiellen Ableitungen werden schließlich in einem Vektor gemäß

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.30)$$

zusammengefasst. Die α -Komponente des Gradienten gibt somit die Steigung der Funktion an, die man “sieht”, wenn man sich parallel zum Einheitsvektor $\mathbf{e}_{\alpha}$ bewegt. Am besten kennt man Äquipotenziallinien und somit auch Gradienten aus der Geographie bzw. den Gebirgen, siehe dazu auch Abb. 1.13.

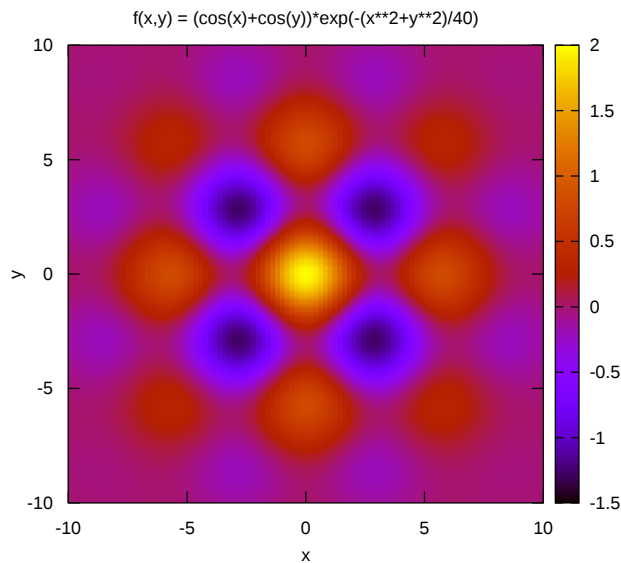


Abb. 1.13: Konturdarstellung eines Höhenprofils $f(x, y)$. Linien gleicher Farbe bedeuten gleiche Höhen. Der Gradient steht senkrecht zu den Linien gleicher Farben.

Nun aber einige Beispiele:

Beispiel 1: Gradient des harmonischen Potenzials

$$V(\mathbf{r}) = \frac{k}{2}r^2 \text{ mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Partielle Ableitung nach x :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k \cdot r \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = k \cdot r \cdot \frac{x}{r} = k \cdot x.$$

Dieser Ausdruck ist dann die x -Komponente des Gradienten. Andere Komponenten können analog berechnet werden $\Rightarrow$

$$\nabla V(\mathbf{r}) = k \cdot r \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = k \cdot \mathbf{r}.$$

Beispiel 2: Gradient des Coulomb/Gravitationspotenzials

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$$

Partielle Ableitung nach x :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$$

Andere Komponenten analog $\Rightarrow$

$$\nabla \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \text{ bzw. } \nabla \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r^2} \cdot \mathbf{e}_r$$

Beispiel 3: Funktion mit kubischer Symmetrie

Zur Abwechslung eine Funktion, die keine radiale sondern lediglich kubische Symmetrie⁴

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4} (x^4 + y^4 + z^4) \\ \Rightarrow \nabla f(\mathbf{r}) &= (x^3, y^3, z^3). \end{aligned}$$

Hier ist der Gradient weder parallel noch antiparallel zu $\mathbf{r}$.

Anwendung des Gradienten

Mithilfe des Gradienten können Funktionen in eine Potenzreihe erster Ordnung entwickelt werden. So wie bei Funktionen, die nur von einer Veränderlichen abhängen, gilt dann

$$f(x, y, \dots) \approx f(x_0, y_0, \dots) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + \dots, \quad (1.31)$$

wobei die partiellen Ableitungen bei $(x_0, y_0, \dots)$ ausgewertet werden. Die Vektorschreibweise von Gl. (1.31) lautet

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \nabla f(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (1.32)$$

unabhängig davon, wieviele Komponenten der Vektor $\mathbf{r}$ hat.

⁴Bei kubischer Symmetrie können u.a. x und y bzw. y und z vertauscht werden, ohne dass dies $f(x, y, z)$ ändern würde.

1.5 Kondensatoren und Feldenergie

Aus den Rechnungen für eine unendlich ausgedehnte Platte mit homogener Ladungsdichte, die wir im Abschnitt 1.3.4 vorgenommen haben, können wir für das elektrische Feld zwischen zwei planparallelen Platten zwanglos folgern, dass:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{A} \left(\frac{Q_{\text{links}}}{2} - \frac{Q_{\text{rechts}}}{2} \right).$$

Mit der Vorgabe, dass $Q_{\text{links}} = -Q_{\text{rechts}} = Q$ folgt für E :

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A}.$$

Die Energie, die benötigt wird, um eine Probeladung $q \ll Q$ von links nach rechts zu verschieben, beträgt somit:

$$W = \underbrace{q \cdot E}_{\text{Kraft}} \cdot \underbrace{d}_{\text{Weg}} = q \cdot U.$$

Dabei ist $U = E \cdot d$ die Potenzialdifferenz (Spannung) zwischen den beiden Platten. Es gilt also:

$$(q) \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{d}{A} \cdot Q = (q) \cdot U$$

$$\text{oder } Q = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot U.$$

Daraus folgt, dass Ladung und Potenzialdifferenz proportional zueinander sind. Der Proportionalitätsfaktor ist eine Eigenschaft des Objekts und wird Kapazität genannt. Je höher die Kapazität ist, desto mehr Ladung wird bei gegebener Spannung auf die Platten geladen.

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad \textbf{Kapazität eines Plattenkondensators} \quad (1.33)$$

Kapazitäten (von Kondensatoren) spielen in Schaltkreisen aber auch bei der Energiespeicherung eine wichtige Rolle, insbesondere dann, wenn (kurzfristig) hohe Leistungen gewünscht sind.

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}} = 1 \text{ F} \quad \text{Farad}$$

$$= [\varepsilon_0] \left[\frac{A}{d} \right] = [\varepsilon_0] \cdot \text{m}$$

Die Kapazität kann nicht nur für zwei parallele Platten definiert werden, sondern für allgemeine Paare von metallischen Objekten. Es ist sogar eine Verallgemeinerung auf beliebig viele metallische Objekte möglich. In diesem Fall hat man eine Kapazitätsmatrix, die einem Spannungsvektor eine Ladung gemäß

$$Q_i = C_{ij} U_j$$

zurordnet. Das mechanische Äquivalent ist ein System aus Massepunkten, die über Federn gekoppelt sind. Wenn nun auf den Massepunkt i eine Kraft angelegt wird, so bewirkt dies nicht nur eine Auslenkung von i sondern von jedem Massepunkt j , der direkt oder indirekt an j gekoppelt ist.

Beispiel: Kapazität eines Koaxialkabel

Ein Koaxialkabel besteht im wesentlichen aus zwei voneinander isolierten Metalldrähten, siehe Abbildung.

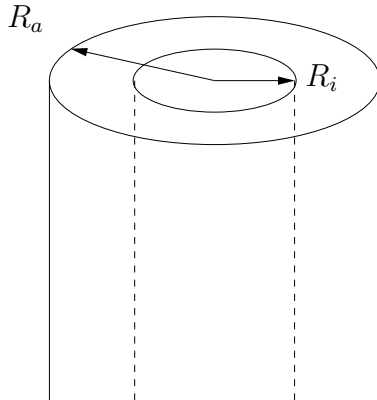


Abb. 1.14: Koaxialkabel

Aus der Gleichung 1.7 des letzten Kapitels:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R}$$

für $R_i < R < R_a$ und $A = 2\pi R \cdot l$

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta l} \approx \frac{Q}{l} \quad \frac{\text{Gesamtladung}}{\text{Gesamtlänge}} \Delta l$$

ist ein Längensegment

Die Energie, die benötigt wird, um eine kleine Testladung von $R = R_i$ nach $R = R_a$ zu verschieben, ist:

$$W = q \int_{R_i}^{R_a} E(R) dR = q \cdot \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{R} dR \quad (1.34)$$

$$= q \cdot \underbrace{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \frac{R_a}{R_i}}_{\text{Potenzialunterschied } V} \quad (1.35)$$

$$\text{mit } \lambda = \frac{Q}{l} \Rightarrow Q = \underbrace{2\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{l}{\ln \frac{R_a}{R_i}}}_{C \text{ (Koaxialkabel)}} \cdot U. \quad (1.36)$$

$$\int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{R} dR = \ln R \Big|_{R_i}^{R_a} = \ln R_a - \ln R_i = \ln \frac{R_a}{R_i}. \quad (1.37)$$

$\Rightarrow$ Ein 100 m langes Kabel mit $R_a = 2$ m und $R_i = 1$ m hat dieselbe Kapazität wie ein gleich langes Kabel mit $R_a = 20$ nm und $R_i = 10$ nm, nämlich $C/\varepsilon_0 = \frac{200\pi}{\ln 2}$ m.

1.5.1 Parallelschaltung von Kondensatoren

In elektrischen Schaltungen werden Kondensatoren oft seriell oder parallel zu Widerständen, Spulen aber auch zu anderen Kondensatoren geschaltet. Man kann dann jeweils parallel oder seriell geschaltete Kondensatoren vereinfacht mit der Angabe einer effektiven Kapazität beschreiben. Die Gleichstromquelle (U) gibt die Spannung vor. An jeder Kapazität liegt dieselbe Spannung an.

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q_1 &= C_1 \cdot U & Q_2 &= C_2 \cdot U \\ Q_{\text{gesamt}} &= Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \cdot U \end{aligned}$$

Parallelgeschaltete Kapazitäten addieren sich!

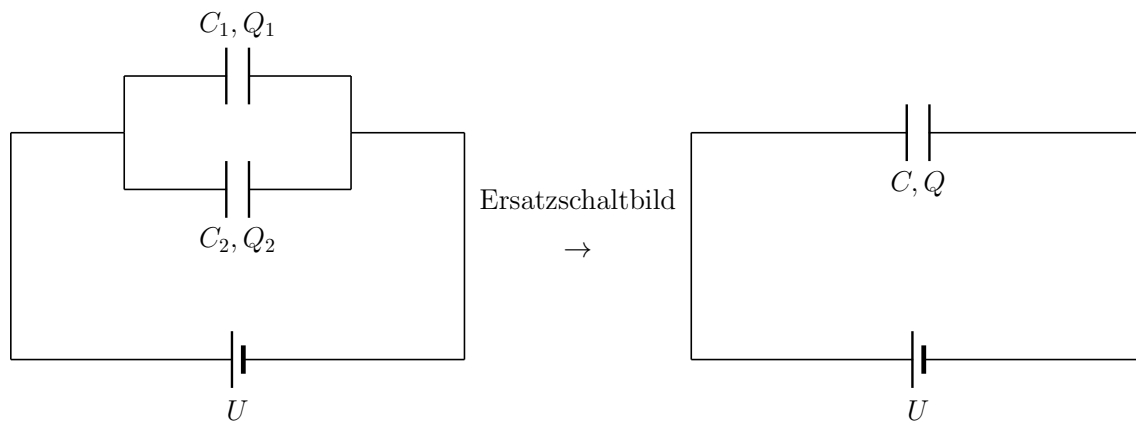


Abb. 1.15: Parallelschaltung von Kapazitäten

Siehe auch:
$$C_{\text{gesamt}} = \frac{\varepsilon_0}{d} \cdot (A_1 + A_2)$$

Die Flächen einer in zwei Teile geschnittenen Kapazität addieren sich.

1.5.2 Serienschaltung von Kondensatoren

Wir betrachten die Situation, welche im folgenden Schaltbild dargestellt ist. Die Summe der Spannungen muss den externen Spannung entsprechen!

$$\Rightarrow U_1 = \frac{1}{C_1} \cdot Q \qquad U_2 = \frac{1}{C_2} \cdot Q$$

Insgesamt gilt also:

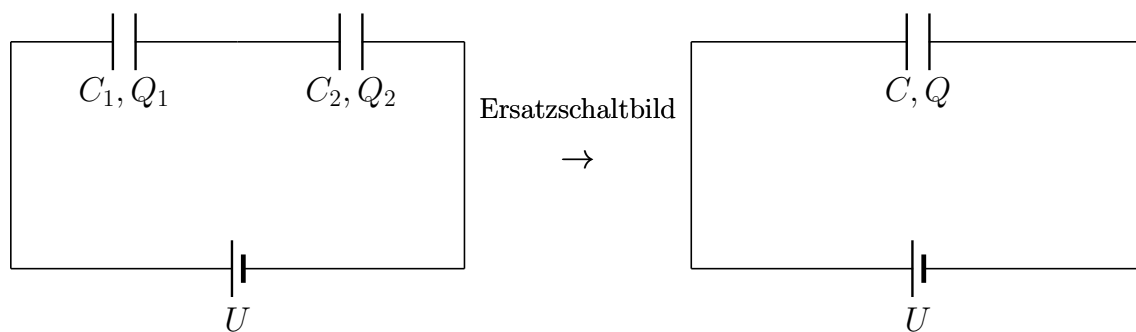


Abb. 1.16: Serienschaltung von Kapazitäten

$$U = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \cdot Q$$

$$Q = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} \cdot U.$$

Damit findet man folgenden Zusammenhang:

In Serienschaltung addieren sich die inversen Kapazitäten zur inversen Gesamtkapazität.

Siehe dazu auch:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0 A} \cdot \underbrace{(d_1 + d_2)}_{=d} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Auch komplizierte Serien- und Parallelschaltungen von Kondensatoren lassen sich als effektive

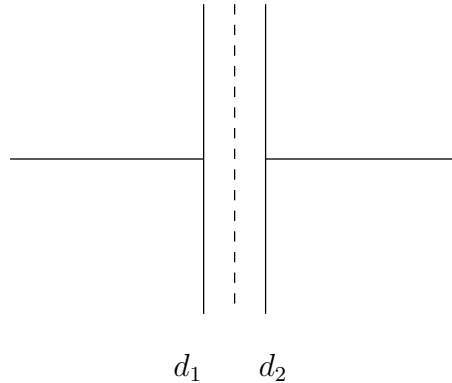


Abb. 1.17: Werden zwei Kondensatoren mit gleichen Flächen hintereinander geschaltet, addieren sich effektiv die Abstände der Platten zu einem Gesamtabstand.

Kapazität darstellen. Bei ganz genauer Betrachtung muss man allerdings die Kapazität als eine Matrix ansehen. Dies zu vertiefen sprengt aber den Rahmen der Vorlesung.

1.5.3 Energie in einem Kondensator

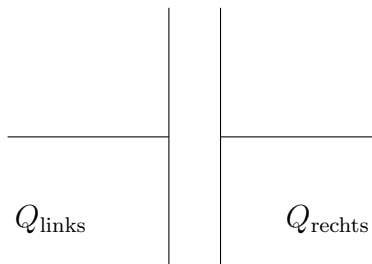


Abb. 1.18: Die Gesamtladung eines Kondensators in elektrischen Schaltkreisen ist neutral, es gilt $Q_{\text{rechts}} = -Q_{\text{links}}$

Jede Partialladung in der linken Platte "fühlt" das Potenzial der Ladungen auf der rechten Platte. Die Gesamtenergie, die in der Wechselwirkung zwischen den Ladungen steckt, kann prinzipiell über Summation bzw. Integration berechnet werden.

Alternativ:

Rechte Platte erzeugt ein E-Feld:

$$E = -\frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_{\text{rechts}}}{A} \quad (1.38)$$

$$F = Q_{\text{links}} \cdot E.$$

Nun verschiebe man die linke Platte nach rechts bis sich die beiden Platten berühren.

$$\begin{aligned}\Rightarrow W &= \int_0^d Q_{\text{links}} \cdot \frac{(-1)}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_{\text{rechts}}}{A} dr \\ &= -\frac{1}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_{\text{rechts}} \cdot Q_{\text{links}}}{A} \cdot d = \frac{Q^2}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{d}{A}\end{aligned}\quad (1.39)$$

Damit ist die Energie:

$$W = \frac{Q^2}{2 C} \quad (1.40)$$

oder wenn wir $Q = C \cdot V$ setzen:

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2. \quad (1.41)$$

Das ist die Energie, die wir benötigen, um eine Kapazität zu laden. Diese Formel gilt auch für allgemeine Kondensatoren. Interessanter Weise gibt es offensichtlich keine "Selbstenergie" einer Platte in dieser Rechnung.

Alternative Sichtweise

Energie steckt im *Feld* der wechselwirkenden Ladungen. Ladungen selbst wechselwirken nicht, sondern sie erzeugen ein Feld, das Energie hat.

$$\text{Im Plattenkondensator:} \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \quad \text{in (1.39) eingesetzt:} \quad Q = \varepsilon_0 \cdot A \cdot E$$

$$\Rightarrow W = \frac{(\varepsilon_0 \cdot A \cdot E)^2}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{d}{A} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot (A \cdot d).$$

$$\frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} = \text{Energiedichte} = \frac{W}{A \cdot d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \quad (1.42)$$

Diese Formel gilt allgemein - also auch außerhalb eines Plattenkondensator.

Zusatzwissen: Ein Proton ist prinzipiell ein Punktteilchen. Bei genauer Betrachtung stellt sich jedoch heraus, dass es einen zwar sehr kleinen, aber dennoch endlichen Radius, $R = 0.877 \text{ fm}$ hat. Man kann nun annehmen, dass die Ladungsdichte ρ innerhalb dieses Radius konstant ist und außerhalb gleich null und die Feldenergie berechnen.

$$\rho = \begin{cases} 0 & r > R \\ \rho_0 & r \leq R \end{cases}$$

Betrachte nur Feldenergie außerhalb des Protons, wo der Betrag des elektrischen Feldes gegeben ist durch:

$$|\mathbf{E}| = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Volumen einer Kugelschale der Dicke ΔR :

$$\Delta V = \underbrace{4 \pi r^2}_{\text{Oberfl. Kugel}} \cdot \Delta r.$$

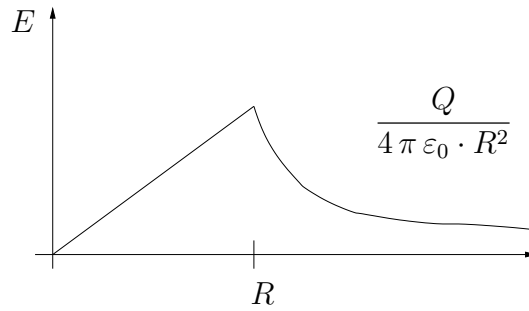


Abb. 1.19: Feld einer homogen geladenen Kugel, hier eines Protons; siehe auch Abschnitt 1.3.4

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow W &= \sum_{r>R} \Delta V \cdot \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \rightarrow \int_R^\infty dr 4\pi r^2 \cdot \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{1}{r^4} \\
 &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr}_{-\frac{1}{r} \Big|_R^\infty = \frac{1}{R}} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot R}.
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

Setzen wir Zahlenwerte ein, erhalten wir $W = 0,82 \text{ MeV}$. Mit Hilfe der Formel $E = m \cdot c^2$ (hier steht E für Energie), kann man der Energie eine Masse zuordnen. Das Ergebnis ist $m = 1,46 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$. Dies ist nicht die Masse eines Protons sondern ungefähr die eines Elektrons ($m_e = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$.) bzw. die seines Antiteilchen.

2 Materie und elektrische Felder

In Abschnitt 1.3.3 haben wir bereits untersucht, wie ein vorgegebenes elektrisches Feld Elektronen in einer Braunschen Röhre ablenkt. Elektrische Felder beeinflussen aber nicht nur das Verhalten freier Ladungen sondern auch das gebundener Ladungen. So basiert das Funktionsprinzip von Lautsprechern – oder ganz allgemein das von Aktoren – darauf, dass eine Spannungsänderung die Formänderung eines (piezoelektrischen) Materials bewirkt. Umgekehrt induziert die Formänderung desselben Materials – und damit die Verschiebung von Ladungen – eine Spannung, was z.B. in Sensoren genutzt wird. In diesem Kapitel wollen wir diese Aspekte etwas vertiefen und beschäftigen uns mit elektrischen Wechselwirkungen in der Materie aber auch mit der Wechselwirkung zwischen elektrischen Feldern und Materie.

2.1 Ionenkristalle

Der Zusammenhang ionischer Kristalle¹, wie z.B. Kochsalz bzw. NaCl, erfolgt durch die elektrostatische Wechselwirkung. Natrium ist in dem Salz einfach positiv geladen und Chlor einfach negativ. Die Ionen versuchen sich nun so anzuordnen, dass sich die Na^+ *Kationen* (positive geladene Ionen heißen Kationen) so gut es geht meiden und stattdessen die negativ geladenen Cl^- *Anionen* als Nachbarn in einem Gitter haben. Umgekehrt wollen auch die Cl^- sich ebenfalls meiden und bevorzugen Na^+ als Nachbarn. Für andere Ionenkristalle gelten dieselben Überlegungen, insbesondere für Salze aus einem Halogen und einem Alkalimetall. Im Folgenden wird deshalb NaCl als Modellbeispiel für Ionenkristalle verwendet.

Weil sich Atome bei sehr kleinen Abständen abstoßen, können sich selbst zwei entgegengesetzt geladene Ionen nicht beliebig nahe kommen. Diesen Sachverhalt hat der großartige amerikanische Trommler, Lebemann, Physiker und Nobelpreisträger Richard Feynman treffend wie folgt zusammen gefasst: *If, in some cataclysm, all of scientific knowledge were to be destroyed, and only one sentence passed on to the next generation of creatures, what statement would contain the most information in the fewest words? I believe it is the atomic hypothesis that all things are made of atoms - little particles that move around in perpetual motion, attracting each other when they are a little distance apart, but repelling upon being squeezed into one another. In that one sentence, you will see, there is an enormous amount of information about the world, if just a little imagination and thinking are applied.*

Aber wie genau stoßen sich zwei Atome ab? Leider gibt es dazu kein allgemein gültiges Gesetz. Wir wissen nur, dass die Abstoßung bei kleinen Abständen schneller anwachsen muss als die (attraktive) elektrische Wechselwirkung, sonst käme es schließlich zur Fusion von Cl^- und Na^+ . Der Einfachheit halber nehmen wir nach Gustav Adolf Feodor Wilhelm Ludwig Mie (deutscher Physiker, 1868–1957) für die Abstoßung wie für die Anziehung eine Paarwechselwirkung² in Form eines Potenzgesetzes an. Somit erhalten wir die gesamte potentielle Energie eines Ionen-

¹Kristalle sind Festkörper mit streng periodisch fortgesetzter Struktur.

²Eine Paarwechselwirkung bezeichnet ein Potential zwischen zwei Punkten/Atomen, das nur vom Abstand abhängt und nicht durch die Position weiterer Atome beeinflusst wird.

Paares als Funktion des Abstandes r zwischen zwei Ionen:

$$V_{\text{pot}}(r) = \frac{W_{\text{NaCl}}}{n r^n} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{Na}}^2}{r}. \quad (2.1)$$

Hierbei wurde der Vorfaktor $1/n$ im repulsiven Potential eingeführt, um spätere Rechnungen zu vereinfachen. Es sei angemerkt, dass ohne die Division durch n , dem Parameter W_{NaCl} das $1/n$ -fache seines jetzigen Wertes zugeordnet werden müsste. Die Normierung mit n ändert also nichts an den Eigenschaften des Potentials.

Unter der Annahme, dass die Wechselwirkung zwischen Natrium und Chlor Ionen tatsächlich durch das in Gleichung (2.1) definierte *Paarpotential* gut beschrieben ist, wären die Eigenschaften von Na^+Cl^- Systemen durch entsprechende Summation über Paarpotentiale komplett bestimmt.³ Für die Ladung Q_{Na} kann die Elementarladung angenommen werden. Aber wie können die verbliebenen Parameter W_{NaCl} und n bestimmt bzw. geeicht werden? Dazu betrachten wir als nächstes ein NaCl Ionenpaar.

2.1.1 Vorbetrachtung: Das NaCl Ionenpaar

Unter der Annahme, dass die Wechselwirkung zwischen Natrium und Chlor Ionen tatsächlich durch das in Gleichung (2.1) definierte *Paarpotential* gut beschrieben ist, ergibt sich die Frage, welche messbaren Größen für ein NaCl Ionenpaar (IP) vorhergesagt werden können. Im mechanischen Gleichgewicht — und somit bei tiefen Temperaturen — wird das Ionenpaar versuchen, seine potentielle Energie zu minimieren. Für den Gleichgewichtsabstand a_0 im Ionenpaar gilt demzufolge, $V'_{\text{pot}}(a_0) = 0$, und somit nach einer kleinen Zwischenrechnung

$$\frac{W_{\text{NaCl}}}{a_0^n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{Na}}^2}{a_0} \quad (2.2)$$

Die Potentialparameter sollten diese Gleichung erfüllen. Also ist bei Kenntnis von a_0 (für das NaCl Ionenpaar) de-facto ein Parameter festgelegt. Benötigt wird also eine zweite Eigenschaft. Prinzipiell bietet sich die Bindungsenergie $E = -V_{\text{pot}}(a_0)$ an, die sich durch Einsetzen der Gleichung (2.2) in Gleichung (2.1) einfach zu

$$E_0 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{Na}}^2}{a_0} \quad (2.3)$$

bestimmen lässt. Die Verwendung von E_0 zur Eichung der Repulsion ist allerdings aus zweierlei Gründen keine gute Idee: Erstens ist E_0 nicht sehr genau messbar. Zweitens hängt E_0 vorwiegend von der attraktiven Wechselwirkung ab, wird also durch den genauen Wert des Exponenten n nur geringfügig geändert. Deshalb würde ein kleiner Fehler der Partialladung auf Natrium zu einer großen Änderung und damit großem Fehler des Exponenten n führen.

Es bietet sich daher an, den Parameter n aus der Krümmung des Potentials $\kappa = V''_{\text{pot}}(a_0)$ zu bestimmen. Durch zweimaliges Ableiten von $V_{\text{pot}}(r)$ und erneute Auswertung der Gleichung (2.2) ergibt diese sich nämlich nach ein, zwei Rechenschritten zu

$$\kappa = (n - 1) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{Na}}^2}{a_0^3}. \quad (2.4)$$

³ Ionische Systeme aus Halogenen und Alkali-Metallen sind nahezu die einzigen Systeme, deren Wechselwirkungen sich durch Paarwechselwirkungen recht genau beschreiben lassen. Für Edelgase wird dies zwar auch gerne behauptet, was aber mit Ausnahme des schwer polarisierbaren Heliums nur bedingt stimmt.

κ stellt nichts weiteres da als eine effektive Federkonstante. Die Federkonstante eines einzelnen Ionenpaars lässt sich zwar nicht so ohne weiteres in einem mechanischen Experiment messen, jedoch sind Schwingungsfrequenzen ω_0 ionischer Moleküle mit Infrarotspektroskopie recht genau zu bestimmen.

Für die Kreisfrequenz der Schwingung eines harmonischen Oszillators — und nichts anderes ist das NaCl Ionenpaar, solange die Auslenkungen von der Gleichgewichtslage klein sind — gilt gemäß der klassischen Mechanik

$$\omega_0 = \sqrt{\kappa/\mu}, \quad (2.5)$$

wobei μ die letztes Semester eingeführte reduzierte Masse ist und κ eine Federkonstante.

Hintergrund: Vielleicht erinnern Sie sich ja sogar daran, dass die Bewegungsgleichungen von zwei Massepunkten m_1 und m_2 im Schwerpunktsystem $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(r)$ lautet, wobei für die reduzierten Masse $\mu = m_1 \cdot m_2 / (m_1 + m_2)$ gilt. Bei kleinen Abweichungen des Abstandes r aus seiner Gleichgewichtslage, kann das Potential durch eine Taylor Reihe zweiter Ordnung gut genähert werden. Durch Vergleich der Ausdrücke der Energie des harmonischen Oszillators und der Taylor-Reihe eines Potentials um eine stabile Gleichgewichtslage, kann man dann erkennen, dass eine Federkonstante nichts anderes ist als die Krümmung eines Potentials.

Ersetzen wir κ in Gleichung (2.4) mithilfe der Beziehung (2.5) kann n unter Verwendung experimenteller Werte, $m_{\text{Na}} = 3,82 \cdot 10^{-26}$ kg, $m_{\text{Cl}} = 5,89 \cdot 10^{-26}$ kg, $a_0(\text{NaCl} - \text{IP}) = 2,36$ Å, Kreisfrequenz $\omega_0(\text{NaCl} - \text{IP}) = 68,7$ THz, zu

$$n = 1 + 4\pi\epsilon_0 \mu_{\text{NaCl}} \omega_0^2 a_0^3 / Q_{\text{NaCl}}^2 \quad (2.6)$$

$$\approx 7,22 \quad (2.7)$$

bestimmt werden. Mit diesem Wissen können nun auch die potentielle Energien beliebiger Anordnungen – wie z.B. Kristalle – bestimmt werden.

Als ersten Test des Modells kann die Bindungsenergie des Ionenpaares mithilfe von Gleichung (2.3) zu $E_0 = 5,27$ eV bestimmt werden. Der experimentelle Wert liegt für die Dissoziation in zwei Ionen liegt bei $E_0 = 5,78$ eV.

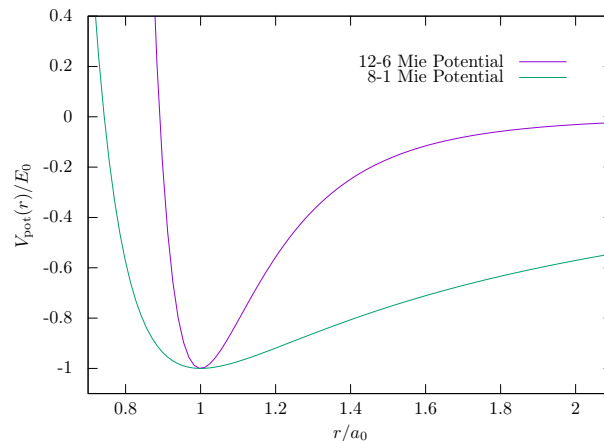


Abb. 2.1: Potentielle $V_{\text{pot}}(r)$ je Molekül als Funktion der Bindungslänge r für zwei verschiedene Mie Potentiale $V(a) = c_1/a^n - c_2/a^m$. Sowohl Energien als auch Abstände sind auf die Werte normiert, die sie am mechanischen Gleichgewicht annehmen. Die Kombination $(n \approx 7, m = 1)$ ist repräsentativ für ionische Wechselwirkung und $(n = 12, m = 6)$ für Edelgasatome.

Bevor wir uns periodischen Strukturen zuwenden, soll das Thema Paarpotentiale noch kurz vertieft werden. Die Wechselwirkung zwischen Atomen mit abgeschlossenen Elektronenschalen kann sehr grob durch das sogenannte Lennard-Jones Potential — ein Spezialfall eines Mie Potentials — genähert werden. Die Repulsion soll dabei mit $1/r^{12}$ abfallen und die attraktiven Wechselwirkungen mit $1/r^6$, was dann ein sogenanntes 12-6 Mie-Potential darstellt. Normieren wir die resultierenden Potentiale auf den Bindungsabstand und die Energien auf die Bindungsenergie ergeben sich für 12-6 (Lennard Jones) und 7-1 (NaCl) wie in Abb. 2.1 dargestellt, resultieren zwei sehr unterschiedliche Potentialkurven.

Aus dem eben erhaltenen Ergebnis können direkt Rückschlüsse auf die Elastizität von Kristallen gezogen werden. Eine kleine Potentialkrümmung bedeutet nämlich, dass die Bindungen — ausgedrückt in Einheiten der Bindungsenergie und der Bindungslänge — recht weich sind. Im Umkehrschluss führt eine große Krümmung zu einer großen Steifigkeit. In kovalent gebundenen Festkörpern nimmt die Anziehung auch sehr schnell mit zunehmenden interatomaren Abstand ab, gemäß Morse passiert dies sogar exponentiell schnell. Deshalb ergibt sich, z.B. für die Wechselwirkung zwischen Kohlenstoffatomen im Diamant, eine sehr große Potentialkrümmung. Kochsalz ist also nicht viel einfacher komprimierbar als Diamant, weil die Wechselwirkungen in NaCl so schwach sind. Stattdessen macht Krümmung des Potentials den wesentlichen Unterschied aus. Für ionische Kristalle werden diese Betrachtungen im Folgenden quantitativ weiter geführt.

2.1.2 Der eindimensionale Ionenkristall

Zunächst beschränken wir uns bei der Untersuchung der Eigenschaften ionischer Kristalle auf eine räumliche Dimension. Die in 1D durchgeführten Rechnungen ändern sich in höheren Dimensionen in vielerlei Hinsicht kaum, obgleich die Buchhaltung zur Auswertung der elektrostatischen Wechselwirkung in $D > 1$ kompliziert wird. Gesucht ist in jedem Fall immer ein Ausdruck für die Gesamtenergie eines Systems, weil sich daraus alles andere ableiten lässt, zumindest was mechanische Eigenschaften angeht.

Der allgemeine Ausdruck für $V_{\text{pot}}^{\text{tot}}$, auch in $D > 1$, lautet bei den im letzten Abschnitt eingeführten Paarpotentialen

$$V_{\text{pot}}^{\text{tot}} = \sum_{i,j>i} \frac{W_{ij}}{n r_{ij}^n} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}. \quad (2.8)$$

Die Summe über j erfolgt mit der Bedingung $j > i$, damit Bindungen nicht doppelt gezählt werden. Für periodische Systeme kann $V_{\text{pot}}^{\text{tot}}$ relativ leicht ausgewertet werden, da lediglich eine Elementarzelle berücksichtigt werden muss. Dies soll im nächsten Schritt für eindimensionales NaCl getan werden. Die energetisch günstigste Struktur in einer Dimension besteht offensichtlich, so wie in Abbildung 2.2 gezeigt, aus sich abwechselnden Natrium und Chlorid Ionen.

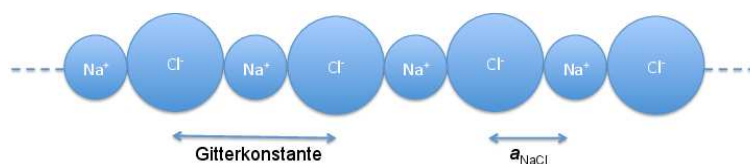


Abb. 2.2: Schematische Darstellung eines ionischen Kristalls in einer Dimension. Ladungen alternieren, weil sich damit die potentielle Energie minimieren lässt.

Zur Aufsummierung des Potentials in einer perfekt regulären Struktur werden Repulsion und Coulombwechselwirkung zunächst separat betrachtet. Beginnen wir mit der Repulsion. Sie fällt sehr schnell ab, in etwa proportional zu $1/r^7$. Sprich die repulsive Wechselwirkung (WW) mit den übernächsten Nachbarn macht in etwa nur das 1/128-fache der WW mit nächsten Nachbarn aus. Da das Potential ohnehin eine Näherung darstellt, vernachlässigen wir im Folgenden die repulsiven WW mit übernächsten Nachbarn. In höheren Dimensionen, in denen die übernächsten Nachbarn bei z.B. $\sqrt{2}a_0$ statt bei $2a_0$ sitzen, sind die Korrekturen zwar etwas größer, aber noch immer unterhalb 10%. Deshalb werden wir diese Terme auch in höheren Dimensionen vernachlässigen. Die Coulomb-WW fällt hingegen langsam ab. Es kann daher – vor allem in $D > 1$ – nicht so leicht abgeschnitten werden. In der Tat konvergiert die Summe selbst in $D = 1$ nur deshalb, weil die Elementarzellen neutral sind und die Summanden alternierend sind.

Mit dem eben Gesagten lässt sich Gleichung (2.8) für ein Ion – egal ob Na^+ oder Cl^- – ohne viel Aufwand auswerten, insbesondere weil sich die Atome in einer Dimension leicht durchnummerieren lassen und sich damit die absoluten Positionen einfach zu $r_j = r_0 + j \cdot a_{\text{NaCl}}$ bestimmen lassen und damit die Abstände zu $r_{ij} = |i - j| a_{\text{NaCl}}$. Zur Berechnung der Energie je Atom, kann die Wechselwirkungsenergie jedes Atompaars zur Hälfte einem Atom zugeordnet werden. Alternativ kann die Wechselwirkung zwischen i und j dem Atom mit dem kleineren Index zugeschlagen werden. Damit erhält man für die Energie je Ion – wieder egal ob Na^+ oder Cl^- – in der linearen Kette zu

$$v_{\text{pot}} = \frac{W_{\text{NaCl}}}{n a_{\text{NaCl}}^n} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a_{\text{NaCl}}} \underbrace{2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}}_{\alpha_{\text{M}}}, \quad (2.9)$$

Diese Gleichung schreiben wir nun so um, dass sie auch in $D > 1$ verwendbar ist:

$$v_{\text{pot}} = \frac{Z}{2} \frac{W_{\text{NaCl}}}{n a_{\text{NaCl}}^n} - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a_{\text{NaCl}}} \frac{\alpha_{\text{M}}}{a_{\text{NaCl}}}. \quad (2.10)$$

Hierbei steht Z für die Anzahl der nächsten Nachbarn, während α_{M} *Madelung-Konstante* heißt. Sie gibt die Coulomb-Energie je Atom in einem Kristall an und zwar in Einheiten von $Q^2/(8\pi\epsilon_0 a)$, wobei a der Abstand zweier nächster Ionen auf dem Gitter ist. Diese Energieeinheit entspricht der Coulomb-Energie eines Moleküls je Atom. Der Vorteil der Schreibweise des Potentials in Gleichung (2.10) gegenüber Gleichung (2.9), liegt darin, dass sie für auch für höherdimensionale Kristalle gilt.

Die lineare Kette ist einer der wenigen periodischen Strukturen, für die ein analytischer Ausdruck für α_{M} angegeben werden kann. Dazu erinnern wir uns an die Reihenentwicklung des Logarithmus:

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots + (-x)^n/n + \dots \quad (2.11)$$

Wird $x = 1$ gesetzt, entspricht diese Summe genau der halben Madelung Konstante in Gleichung (2.9), sodass

$$\alpha_{\text{M}}(D = 1) = 2 \ln 2. \quad (2.12)$$

Mit diesem Wert kann nun der Gleichgewichtsabstand zweier Nachbarn und auch die effektive Steifigkeit einer Kette berechnet werden. Dies ist aber eher eine Aufgabe für eine Übung. Stattdessen schreiten wir zur Behandlung von "echten", also 3D Ionenkristallen voran.

2.1.3 Der höherdimensionale Ionenkristall

Wie schon im vorherigen Abschnitt bemerkt, können höherdimensionale Kristalle prinzipiell genauso behandelt werden wie die eindimensionale Kette. Der einzige Unterschied besteht in den numerischen Werten für Z und α_M , die beide Funktionen des Kristallgitters sind. Für gegebene Gitter sind Koordinationszahlen und damit Z recht einfach zu bestimmen. Die Berechnung von α_M erweist sich jedoch in drei Dimensionen als schwierig, insbesondere deshalb, weil die entsprechenden Summen über die Coulomb-WW nur bedingt konvergieren, d.h., dass Obacht bei der Reihenfolge der Aufsummation gegeben werden muss.

Für einfache Kristalle der Stöchiometrie MX kommen in drei Dimensionen neben der Kochsalz (NaCl) Struktur auch die Caesiumchlorid (CsCl) Struktur sowie Zinkblende/Sphalerit ($\alpha\text{-ZnS}$) und Wurtzit ($\beta\text{-ZnS}$) in Frage.⁴ Die jeweiligen Madelung Konstanten wurden numerisch zu $\alpha_M(\text{NaCl}) \approx 1,74756$, $\alpha_M(\text{CsCl}) \approx 1,76267$, $\alpha_M(\alpha\text{-ZnS}) \approx 1,633806$ und $\alpha_M(\beta\text{-ZnS}) \approx 1,64132$ bestimmt. Die Unterschiede zwischen Madelung Konstanten verschiedener Strukturen ist so klein, dass wir zur Beantwortung der Frage, welche Struktur die energetisch günstigste ist, die WW mit übernächsten Nachbarn für manche Kristalle doch nicht vernachlässigen dürfen. Für semi-quantitative Betrachtungen fahren wir mit dieser Näherung dennoch fort und zwar weiterhin im Rahmen von NaCl .

Den Wert für W_{NaCl} werden wir weiterhin aus der Eichung mit dem Ionenpaar verwenden. Mit ihm kann durch geschicktes Ausklammern die potentielle Energie eines Kristalls (K) je Atom als Funktion der Bindungslänge a wie folgt ausgedrückt werden

$$v_K(a) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{Na}}^2}{a_0(\text{IP})} \left(\frac{Z}{n} \left\{ \frac{a_0(\text{IP})}{a} \right\}^n - \alpha_M \frac{a_0(\text{IP})}{a} \right). \quad (2.13)$$

Wie zuvor kann die optimale Bindungslänge $a_0(K)$ dadurch berechnet werden, dass die Ableitung der potentiellen Energie nach a verschwindet. Diese Forderung führt recht zwanglos zu der Bedingung

$$a_0(K) = a_0(\text{IP}) \left(\frac{Z}{\alpha_M} \right)^{1/(n-1)}. \quad (2.14)$$

für die Gleichgewichts-Bindungslänge im Kristall. Die Vorhersage unseres Modells ist also ein langsames (für große Werte von n ein fast nur logarithmisches) Anwachsen der Bindungslänge mit der Koordinationszahl.

Als Zahlenwert ergibt sich in der vorliegenden Fallstudie für NaCl in der NaCl Struktur mit $Z = 6$ und $n \approx 7,22$ das Verhältnis $a_0(K)/a_0(\text{IP}) \approx 1,22$, sodass $a_0(K) \approx 2,88 \text{ \AA}$. Der experimentelle Wert liegt bei $2,82 \text{ \AA}$, was im Rahmen des recht simplen Modellansatzes ein durchaus zufrieden stellendes Ergebnis ist.

Aus materialwissenschaftlicher Sicht ist auch die Kenntnis des Kompressionsmoduls K von Interesse. Er gibt an, wie stark sich Materie einer isotropen Volumenänderung widersetzt. Definiert werden kann er im mechanischen Gleichgewicht bei externem Druck $p = 0$ als

$$K = V_{\text{eq}} \frac{\partial^2 v_{\text{pot}}}{\partial V^2} \Big|_{V=V_{\text{eq}}}, \quad (2.15)$$

siehe auch den Hintergrund-Einschub am Ende dieses Abschnitts. In der Definition von K ist V_{eq} das Volumen einer Referenzstoffmenge im mechanischen Gleichgewicht und v_{pot} die in dieser Referenzstoffmenge enthaltene Energie. Die Referenzstoffmenge kann aus traditionellen

⁴Falls Sie mit den Strukturen nicht vertraut sind, siehe Wikipedia.

Gründen ein Mol sein, was aber völlig willkürlich ist. Sinnvoller ist hier die Normierung auf ein Atom. In der NaCl Struktur nimmt ein Atom genau das Volumen $V = a^3$ ein, sodass $dV = 3a^2 da$ ist. In anderen Strukturen muss in der Regel dem Differential ein dimensionsloser Vorfaktor hinzugefügt werden. Also lautet die zweite Ableitung der potentiellen Energie nach dem Volumen für NaCl

$$\frac{d^2 v_{\text{pot}}}{dV^2} = \frac{d}{dV} \left(\frac{1}{3a^2} \frac{dv_{\text{pot}}}{da} \right) \quad (2.16)$$

$$= \frac{1}{9a^4} \frac{d^2 v_{\text{pot}}}{da^2} + \underbrace{\frac{dv_{\text{pot}}}{da}}_{=0 \text{ für } a=a_0} \frac{d}{dV} \frac{1}{3a^2} \quad (2.17)$$

wobei a_0 hier die Gleichgewichts-Bindungslänge im Kristall ist. Somit gilt für K

$$K = \frac{1}{9a_0} \left(\frac{d^2 v_{\text{pot}}}{da^2} \right)_{|a=a_0}. \quad (2.18)$$

Für das in diesem Kapitel verwendete Potential ergibt sich $v''_{\text{pot}}\{a_0(\mathbf{K})\}$ schließlich zu

$$v''_{\text{pot}}\{a_0(\mathbf{K})\} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{Na}}^2}{a_0^3(\text{IP})} \left(Z(n+1) \left\{ \frac{a_0(\text{IP})}{a_0(\mathbf{K})} \right\}^{n+2} - 2\alpha_{\text{M}} \left\{ \frac{a_0(\text{IP})}{a_0(\mathbf{K})} \right\}^3 \right). \quad (2.19)$$

Auch hier stimmt die Vorhersage des Modells für NaCl, nämlich $K = 24,6$ GPa, mit dem experimentellen Wert von $K = 24,0$ sehr gut überein.

Insgesamt sind dies bemerkenswerte Ergebnisse. Es wurden Daten über ein Molekül in ein Modell bzw. eine Theorie gefüttert. Diese konnte recht vernünftige Vorhersagen für die Änderungen der Bindungslänge durch Kristallisation sowie den Kompressionsmodul des Kristalls treffen. Prinzipiell wäre es auch möglich gewesen (grob) zu argumentieren, warum NaCl die NaCl Struktur und nicht die CsCl oder eine ZnS Struktur annimmt. Sogar der Schubmodul kann in der Theorie recht genau berechnet. Zudem konnten wir interessante Einsichten gewinnen: Bindungsenergien sind vor allem durch die attraktiven Wechselwirkungen bestimmt, elastische Module jedoch eher von der Repulsion. Diese Betrachtungen gehen somit sehr viel weiter als die üblichen Argumente, die Ionenradien und Packungsdichte-Argumente verwenden, um die verschiedenen Kristallstrukturen von Salze zu erklären. Die Ionenradien werden nämlich aus Kristall- und Molekülstrukturen abgeleitet, nur um dann wieder das zu reproduzieren, was in die Konstruktion des Modells eingegangen ist.

Hintergrund: In der Thermodynamik stellt sich das atomare Volumen V so ein, dass die freie Enthalpie G minimiert wird. Bei sehr kleinen Temperaturen ($T \rightarrow 0$), ist G durch

$$G = N(v_{\text{pot}} + pV)$$

definiert, wobei N die Anzahl der Atome ist und v_{pot} die potentielle Energie je Atom. Aus $\partial G / \partial V = 0$ ergibt sich die sogenannte Zustandsgleichung

$$p(V) = -\frac{\partial v_{\text{pot}}}{\partial V}.$$

Der Kompressionsmodul K – das Inverse der Kompressibilität – besagt wiederum, wie stark der Druck in einer Substanz mit einer relativen Volumenzunahme abnimmt, also

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V} = V \frac{\partial^2 v_{\text{pot}}}{\partial V^2}.$$

2.2 Der elektrische Dipol

Atome und Elektronen lagern sich unter normalen Bedingungen – was auch immer das im Detail sein mag – meist so an, dass lokal Ladungsneutralität besteht. Das vielleicht bekannteste Beispiel ist das Wassermolekül. Selbst in Wasserdampf schweben quasi keine freien OH^- oder $(\text{H}_3\text{O})^+$ Ionen herum sondern fast ausschließlich gebundenes H_2O . Bei Zimmertemperatur liegt in destilliertem Wasser ($\text{pH}=7$) nur jedes 10^{-7} -te Molekül als $(\text{H}_3\text{O})^+$ vor. Dennoch erzeugen auch neutrale Ladungsanordnungen ein elektrisches Feld. Wird die Anordnung der Ladungen durch ein von außen angebrachtes elektrisches Feld verändert, verteilen sich die Ladungen im Raum unter Umständen um. Sprich durch ein von externen Ladungen erzeugtes elektrisches Feld werden unsere Wassermoleküle neu orientiert, was wiederum auch das elektrische Feld in der Nähe der Moleküle verändert. Dieser Sachverhalt soll in diesem Kapitel beschrieben werden.

2.2.1 Elektrisches Potenzial und Feld eines statischen Dipols

Zunächst beschäftigen wir uns mit isolierten, starren Ladungsverteilungen und der Frage, welche Felder sie erzeugen und wie sie auf von externen Ladungen vorgegebene Felder reagieren. Wir betrachten eine Ladungsverteilung wie in Abb. 2.3 gezeigt. Können wir etwas über das elektrische Feld sagen, das die Ladungen q_i am Orte $\mathbf{r}_i$ an einer weit entfernten Stelle erzeugen? Um diese Frage zu beantworten, wenden wir zwei Konzepte an, die wir bisher gelernt haben: Zunächst summieren wir die Wirkungen – in diesem Fall Potenziale – der individuellen Ladungen auf und dann entwickeln wir nach kleinen Parametern.

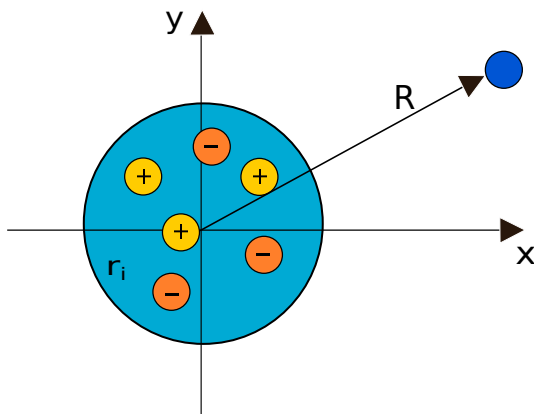


Abb. 2.3: Schematische Darstellung einer neutralen Ladungsverteilung. Eine Testladung befindet sich am Ort $\mathbf{R}$ in großer Entfernung von der eigentlichen Ladungsverteilung.

Im Detail: Das elektrische Potenzial an einem beliebigen Punkt $\mathbf{R}$ im Raum ist

$$\Phi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}. \quad (2.20)$$

Wenn wir die Ladungsverteilung in die Nähe des Ursprungs legen⁵, können wir $\mathbf{r}_i$ als kleinen Parameter betrachten. Wie bereits schon häufiger geschehen, können wir Funktionen in eine Taylor-Reihe entwickeln. Entwickeln wir so, dass nur die Terme erster Ordnung mitgenommen

⁵Die Wahl des am besten geeigneten Koordinatenursprungs ist nicht ganz trivial, da er von Multipolen höherer Ordnung bestimmt wird. Als nullte Näherung eignet sich aber oft der Massenschwerpunkt der Verteilung.

werden, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} &\approx \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{R}}} \\
&= \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{R}/R^2}} \\
&\approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{R}}{R^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in Gleichung (2.20) ein und ziehen alle Ausdrücke, die nicht vom Index i abhängen, aus der jeweiligen Summe heraus:

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{R}) = \frac{1}{R} \underbrace{\sum_i q_i}_{=Q_{\text{ges}} \rightarrow 0} + \frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot \underbrace{\sum_i q_i \mathbf{r}_i}_{=\mathbf{p}} \tag{2.22}$$

Bei einer neutralen Ladungsverteilung verschwindet der erste Summand, der zweite in aller Regel aber nicht. Der zweite Summand erhält bzw. behält den Namen Dipol, selbst wenn die Summe über mehr als zwei Punktladungen geht:

$$\mathbf{p} \equiv \sum_i q_i \mathbf{r}_i \tag{2.23}$$

Er hängt nur von der Ladungsverteilung ab und bleibt bei Ladungsneutralität konstant, wenn wir das Koordinatensystem – ohne es zu rotieren – verschieben. Da der Dipol ein Vektor ist, besitzt er einen Betrag und eine Richtung. Die S.I. Einheit des Dipols ist $[p] = \text{C} \cdot \text{m}$ bzw. in Grundeinheiten $\text{A} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$. Aus historischen Gründen wird der Dipol aber auch heute (leider noch fast immer) in Debye angegeben.

$$[p] = 1 \text{ D} = 3,33564 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m} = 0,2082 \text{ e} \cdot \text{\AA}$$

Das Dipolmoment eines isolierten H_2O Moleküls ist $p \approx 1,8 \text{ D}$ und das eines NaCl Moleküls ist $p_{\text{NaCl}} = 8,5 \text{ D}$. Moleküle mit Inversionssymmetrie, wie z.B. CO_2 mit seinem Bindungswinkel von 180° , haben kein endliches Dipolmoment.

In führender Ordnung, also der eines Dipols, können wir – dank des bisher oben Gerechneten – das elektrische Potenzial der Ladungsverteilung wie folgt nähern

$$\Phi_d(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{p}}{R^3} \tag{2.24}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \cos \alpha}{R^2}, \tag{2.25}$$

solange das Koordinatensystem in oder in der Nähe des Schwerpunktes der Ladungsverteilung liegt. Hierbei ist α der Winkel zwischen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{R}$.

Wie bekommen wir nun das elektrische Feld des Dipols? E_x ist die negative Ableitung von $\Phi(\mathbf{R})$ nach der x -Komponente von $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$. Dazu betrachten wir

$$\frac{\partial}{\partial X} \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{p}}{R^3} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{p_x}{R^3} + \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial X} \frac{1}{R^3}}_{-\frac{3}{R^4} \cdot \frac{\partial R}{\partial X}}$$

Diesen Ausdruck verwenden wir – zusammen mit $\partial R/\partial X = X/R$ (siehe Übungen) – zur Darstellung der x -Komponente des elektrischen Feldes

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{p})X}{R^5} - \frac{p_x}{R^3} \right).$$

Für E_y und E_z gelten natürlich Ausdrücke, in denen alle x Indizes jeweils durch y bzw. z ersetzt werden. Somit gilt für die Vektoren

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{p})\mathbf{R} - R^2 \cdot \mathbf{p}}{R^5}. \quad (2.26)$$

Information: Meistens sitzen Dipole nicht im Ursprung sondern an einer beliebigen Koordinate $\mathbf{R}_p$ im Raum. Um diesem Sachverhalt Rechnung zu tragen, muss in allen bisherigen Formel in diesem Abschnitt $\mathbf{R}$ durch $\mathbf{R} - \mathbf{R}_p$ ersetzt werden.

Das Feld eines Dipols spielt in vielerlei Hinsicht eine wichtige Rolle: So sind die Eigenschaften von polaren Medien – wie Wasser – maßgeblich von den molekularen Dipolen bestimmt. Zudem basiert ein Großteil unserer Telekommunikation auf elektromagnetischen Wellen, die ein zeitabhängiger Dipol – bzw. eine Sendeantenne – abstrahlt. Zeitabhängige Dipolfelder haben – zum Glück – eine andere R -Abhängigkeit als statische Dipole aber eine ähnliche Winkelabhängigkeit.

Kurz vor Abschluss dieses Kapitels sei daran erinnert, dass wir zur Berechnung von Dipolen kontinuierlicher Ladungsverteilungen, wieder die Summe über diskrete Ladungen durch Integrale ersetzen müssen:

$$\sum_i q_i \mathbf{r}_i \rightarrow \sum_i \underbrace{\Delta V_i \rho(\mathbf{r}_i)}_{q_i} \mathbf{r}_i \rightarrow \int dV \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}.$$

Dazu aber mehr in den Übungen.

Wenn auch der Dipol einer Ladungsverteilung verschwindet – wie in unserem CO_2 Molekül, aber auch in N_2 oder O_2 – dann wäre der erste (potenziell) nicht verschwindende Teil einer Potenzial-Entwicklung der Quadrupol, den wir aber in dieser Vorlesung nicht weiter vertiefen wollen. Potenzial und Feld eines Quadrupols fallen im Vergleich zum Dipol wiederum mit einer um eins erhöhten Potenz des Abstandes R ab.

Zusatzwissen: Ein einfacher Quadrupol setzt sich aus zwei Dipolen zusammen, deren Betrag gleich groß ist, deren Orientierung aber genau entgegengesetzt ist. Das Potenzial und das Feld eines Quadrupols kann bei großen Abständen durch eine Taylorreihe bestimmt werden, die aber (systematisch) eine Ordnung höher sein muss als beim Dipol.

2.2.2 Statischer Dipol im elektrischen Feld

Wir betrachten wieder eine neutrale Ladungsverteilung wie in Abbildung 2.3 dargestellt. Diesmal interessieren wir uns aber für die Frage, wie groß ihre potenzielle Energie in einem von *externen* Ladungen erzeugten Potenzial $\Phi(\mathbf{r})$ ist. Die Summe aller Einzelbeiträge ergibt

$$V_{\text{pot}} = \sum_i q_i \Phi(\mathbf{r}_i). \quad (2.27)$$

Wenn sich $\Phi(\mathbf{r})$ nur schwach über den Bereich der Ladungsverteilung ändert, können wir das externe Potenzial durch eine Potenzreihe

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &\approx \Phi(\mathbf{r}_0) + \nabla\Phi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}_0} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= \Phi(\mathbf{r}_0) - \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\end{aligned}\quad (2.28)$$

am Ort $\mathbf{r}_0$ der Ladungsverteilung annähern. In Gleichung (2.27) einsetzen führt zu

$$\begin{aligned}V_{\text{pot}} &\approx \Phi(\mathbf{r}_0) \underbrace{\sum_i q_i}_{=0} - \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot \underbrace{\sum_i q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)}_{=\mathbf{p}} \\ &= -\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p}\end{aligned}\quad (2.29)$$

$$= -E(\mathbf{r}_0) \cdot p \cdot \cos\vartheta. \quad (2.30)$$

Gleichung (2.30) besagt dass – in der gegebenen Näherung eines konstanten elektrischen Feldes – die potenzielle Energie des Dipols nur vom Betrag und seiner relativen Orientierung zum E-Feld abhängt – aber nicht von $\mathbf{r}_0$. Das wiederum bedeutet für starre Dipole wie ein H_2O Molekül: **Ein konstantes E-Feld übt keine Kraft auf den Masseschwerpunkt eines Dipols aus sondern nur ein Drehmoment** $M_\vartheta = -\partial V_{\text{pot}}/\partial\vartheta$. Sprich, der Dipol ändert seine Energie unter einer Rotation aber nicht unter einer Translation. Hätten wir die Entwicklung des Potenzials eine Ordnung weiter geführt, hätten wir gesehen, dass der Dipol eine Beschleunigung proportional zum Gradienten des elektrischen Feldes (nicht mehr ein Vektor sondern ein Tensor 2. Stufe) erfährt.

2.2.3 Wechselwirkung von Dipolen mit Ladungen und anderen Dipolen

Um die Wechselwirkung zwischen einem Dipol $\mathbf{p}$ am Ort $\mathbf{R}_1$ und einer Ladung Q am Ort $\mathbf{R}_2$ zu berechnen, kann der Dipol in das elektrische Feld der Ladung gesetzt werden oder aber die Ladung in das Potenzial des Dipols. Jedes Mal sollte dieselbe potentielle Energie erhalten werden. Dieses entspricht der Wechselwirkungsenergie zwischen Dipol und Punktladung. Da dies eine exzellente Übung ist, soll sie als Hausaufgabe gelöst werden.

Wird ein (statischer) Dipol $\mathbf{p}_1$ am Ort $\mathbf{R}_1$ in das Feld eines zweiten (statischen) Dipols $\mathbf{p}_2$ gesetzt – letzterer befindet sich am Ort $\mathbf{R}_2$ – dann erhält man durch Einsetzen des Ausdruckes für das Feld eines Dipols – also Gleichung 2.26 – in Gleichung 2.29, die Wechselwirkungsenergie. Schritt für Schritt liest sich dies:

$$V_{\text{pot}} = - \underbrace{\mathbf{E}(\mathbf{R}_1)}_{\text{von } \mathbf{p}_2 \text{ erzeugt}} \cdot \mathbf{p}_1 \quad (2.31)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cdot (\mathbf{R}_{12} \cdot \mathbf{p}_1) \cdot (\mathbf{R}_{12} \cdot \mathbf{p}_2) - R_{12}^2 \cdot (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{R_{21}^5}, \quad (2.32)$$

wobei $\mathbf{R}_{12} \equiv \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$. Wir sehen, dass der Ausdruck bei Vertauschung der Indizes unverändert bleibt. Dies ist recht beruhigend, denn das Ergebnis darf nicht davon abhängen, welcher der Dipole welchen Index bekommt.

2.2.4 Starre Dipole unter thermischem Rauschen

Wird SS 2018 nicht unterrichtet. Dipole sind in der Regel nicht nur einem externen Feld ausgesetzt sondern auch stochastischen oder thermischen Stößen. Diese wirken der systematischen Orientierung der (permanenten) Dipole parallel zum $\mathbf{E}$ Feld entgegen. Wie wahrscheinlich

ist nun eine Orientierung ϑ relativ zu $\mathbf{E}$ im thermischen Gleichgewicht und wie groß ist die zu $\mathbf{E}$ parallele Komponente des Dipols im Mittel? Zur Beantwortung dieser Frage verwenden wir die barometrische Höhenformel. Sie besagt, dass ein Zustand mit einer Wahrscheinlichkeit bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte proportional zu

$$\Pr(V_{\text{pot}}) \propto e^{-V_{\text{pot}}/k_B T}$$

auftritt, wobei V_{pot} die (potenzielle) Energie des Zustands ist, k_B die Boltzmann Konstante und T die Temperatur. Im nun Folgenden wählen wir das Koordinatensystem so, dass $\mathbf{E}$ parallel zur z -Achse liegt. Der Erwartungswert des Dipols ergibt sich nun dadurch, dass jede Orientierung mit seiner Wahrscheinlichkeit gewichtet wird, also

$$\begin{aligned} \langle p_z \rangle &= \frac{\sum_{\text{alle Orientierungen}} p \cdot \cos \vartheta \cdot \Pr[V_{\text{pot}}(\vartheta)]}{\sum_{\text{alle Orientierungen}} \Pr[V_{\text{pot}}(\vartheta)]} \\ &= \frac{\int_{-1}^{+1} d \cos \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, p \cdot \cos \vartheta \cdot e^{E \cdot p \cdot \cos \vartheta / k_B T}}{\int_{-1}^{+1} d \cos \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{E \cdot p \cdot \cos \vartheta / k_B T}}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die Berechnung der Integrale ist etwas weniger wild als es zunächst den Anschein hat. Das Ergebnis lautet

$$\langle p_z \rangle / p = \frac{1}{\tanh(p \cdot E / k_B T)} - \frac{k_B T}{p \cdot E}. \quad (2.34)$$

Für kleine Temperaturen bzw. sehr große E-Felder geht der hyperbolische Tangens gegen eins und somit $\langle p_z \rangle \rightarrow p$. Sprich, bei kleinen Temperaturen oder großen E-Feldern richten sich die Dipole komplett aus. Bei großen Temperaturen oder kleinen E-Feldern geht der hyperbolische Tangens gegen $p \cdot E / k_B T$, sodass $\langle p_z \rangle \rightarrow 0$ oder genauer $\langle p_z \rangle \propto E / k_B T$. Was ist nun für ein isoliertes Wassermolekül ein charakteristisches E-Feld E_c , das weder groß noch klein ist? Dies ist natürlich ein E-Feld, für das der hyperbolische Tangens weder in dem einen noch in dem anderen Limes asymptotisch genähert werden kann, also bei $p \cdot E_c / k_B T \approx 1$ bzw. bei

$$E_c = \frac{k_B T}{p}.$$

Für isolierte oder auch sehr verdünnt vorliegende Wassermoleküle erhält man als Zahlenwert in etwa $E_c = 0.7 \text{ GV/m}$.

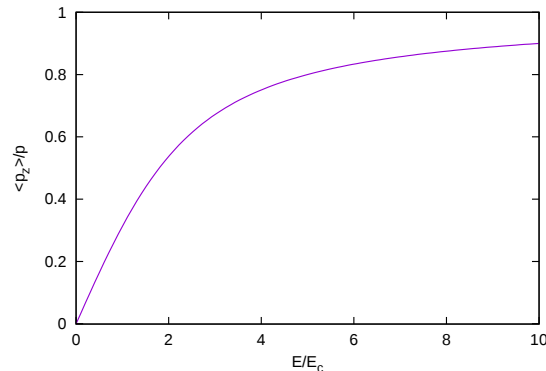


Abb. 2.4: Mittlere z -Komponente eines Dipols $\langle p_z \rangle$ in Einheiten des Gesamtdipols als Funktion des elektrischen Feldes E , welches in Einheiten des charakteristischen Feldes E_c ausgedrückt ist.

Wenn wir die Grenze zwischen ausgerichteten und nicht-ausgerichteten Dipolen bei $\langle p_z \rangle = p/2$ ziehen, so können wir der Abbildung 2.4 entnehmen, dass sie bei Feldern $E \approx 1,8E_c$ liegt. Eine simple Einheitenanalyse hat also mal wieder bis auf einen Faktor der Ordnung eins die richtige Antwort gegeben! Abbildung 2.4 können wir auch entnehmen, dass “kleine” elektrische Felder in Wasserdampf (so man 10^8 V/m als klein bezeichnen möchte, $0,1 \text{ V/nm}$ klingt vielleicht schon etwas besser) einen mittleren Dipol induzieren, der proportional zum angelegten elektrischen Feld ist. Den Proportionalitätsfaktor erhält man durch die Entwicklung von Gleichung (2.34) nach kleinen Werten von $p \cdot E/k_B T$.

2.2.5 Induzierte Dipole

Alle Atome und viele Moleküle haben keinen permanenten Dipol. Allerdings verschieben sich ihre Elektronenschalen im elektrischen Feld gegen die Kerne so, dass ein Dipol entsteht. Ähnliches gilt natürlich auch für ionische Kristalle, in denen ein elektrisches Feld eine Verschiebung des Untergitters der Kationen gegen das der Anionen bewirkt, was auch zu einem Dipol führt. Die durch das elektrische Feld induzierte Polarisierung in einem Atom ist in Abbildung 2.5 dargestellt.

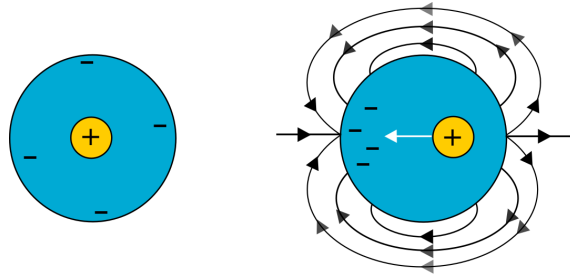


Abb. 2.5: Schematische Darstellung der Ladungsverschiebung eines induzierten Dipols sowie der induzierten elektrischen Felder. In der linken Abbildung sitzt der positiv geladene Kern im Schwerpunkt der Elektronenschale. In einem externen elektrischen Feld wird innerhalb des Atoms die Elektronenhülle gegen den Kern verschoben. Dies führt zu einem induzierten Feld, das dem externen Feld im Atom entgegenwirkt aber außerhalb *im Mittel* das externe Feld verstärkt.

Nehmen wir an, dass die Verschiebung der Elektronenschale um Δz eine Energie quadratisch in der Auslenkung bewirkt.⁶ Damit lautet die potenzielle Energie

$$V_{\text{pot}}(\Delta z, E_z) = V_{\text{pot}}^{(0)} + \frac{k}{2} \Delta z^2 - q \cdot \Delta z \cdot E_z. \quad (2.35)$$

Die Auslenkung der Elektronenschale minimiert die Energie, sodass $\partial V_{\text{pot}}(\Delta z, E_z)/\partial \Delta z = 0$ und damit

$$\begin{aligned} p_z &\equiv q \Delta z \\ &= \frac{q^2}{k} E_z. \end{aligned} \quad (2.36)$$

⁶Für freie Atome kann die Energie nur eine gerade Funktion in Δz sein, da sie spiegelsymmetrisch sind. Nun entwickeln wir die Energie in eine Potenzreihe und bis zum ersten nicht-konstanten Term.

Da diese Rechnung für beliebig orientierte elektrische Felder gilt, kann die letzte Gleichung (für ein Atom in isotroper Umgebung) auch als Vektorgleichung geschrieben werden

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}, \quad (2.37)$$

wobei die Polarisierbarkeit

$$\alpha = q^2/k \quad (2.38)$$

eingeführt und als Skalar angenommen wird.⁷ Wir sehen, dass die Polarisierbarkeit quadratisch in der Ladung q ist. Also lässt sich einer Messung der Polarisierung nicht entnehmen, ob es sich um Materie oder Antimaterie handelt! Zudem können wir feststellen, dass der Energiegewinn eines (linear) induzierbaren Dipols nur halb so groß ist wie der eines statischen Dipols (bei $T = 0$ K), also

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{pot}} &= \frac{k}{2} \Delta z^2 - q \cdot \Delta z \cdot E_z \\ &= -q \cdot \Delta z \cdot E_z / 2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Richtig interessant ist aber die folgende Beobachtung, die wir in Abbildung 2.5 machen können. Die Verschiebung der Elektronen gegen die Kerne ist dergestalt, dass im Inneren des Atoms – was auch immer das Innere eines Atoms sein mag – die induzierten elektrischen Felder dem externen elektrischen Feld entgegenwirken. Da das Feld einer Punktladung keine Vorzugsrichtung hat und somit sein verursachtes elektrische Feld (als Vektor gemittelt) über den gesamten Raum gemittelt gleich null sein muss, bedeutet dies im Umkehrschluss: **Die induzierte Polarisierung eines Atoms bewirkt im Mittel eine Verstärkung des durch externe Ladungen bedingte elektrische Feld außerhalb des Atoms.** Ähnliche Bemerkungen gelten für die Ausrichtung von Molekülen mit permanentem Dipol gegen das thermische Rauschen. Wenn nun aber die Polarisierung eines Atoms – oder die mittlere Ausrichtung permanenter Dipole – das elektrische Feld verstärkt, nimmt die Polarisierung der Materie weiter zu, was wiederum das elektrische Feld verstärkt, was wiederum die Polarisierung verstärkt, was wiederum das elektrische Feld verstärkt, was wiederum und so weiter und so fort. Sie fragen sich nun bestimmt: Wo soll das Ganze hinführen? Kommt es nicht zur Katastrophe? Dieser Frage werden wir als nächstes nachgehen.

⁷ Hätten wir Polarisierbarkeit von Atomen in einem Molekül oder Kristall “niederer Symmetrie” betrachtet, so hätten wir α als Matrix, oder genauer gesagt, als einen Tensor 2. Stufe einführen müssen, weil die Polarisierbarkeit richtungsabhängig wäre. Für Tensoren zweiter Stufe sind sowohl kubische als auch tetragonale Symmetrien aber de-facto isotrop.

2.3 Dielektrika

Ein Dielektrikum (Plural: Dielektrika) ist eine Substanz ohne (eine signifikante Anzahl) freier Ladungsträger. Es kann ein Gas, eine Flüssigkeit oder auch ein Festkörper sein. Als Beispiele seien Luft, Wasser und NaCl sowie SiO₂ genannt. Obwohl in den beiden letzten Beispielen Ionen vorkommen, sind diese nicht frei beweglich sondern durch starke Wechselwirkungen zum Verbleib in der Nähe ihrer Gitterplätze gezwungen; zumindest solange extern angelegten elektrische Felder nicht extrem groß sind. Ein kleines elektrisches Feld bewirkt somit lediglich die Verschiebung des Untergitters der Kationen (z.B. Na⁺) gegen das der Anionen (Cl⁻). In einfachen Gasen bewirkt das elektrische Feld hingegen, wie in Kapitel 2.2.5 diskutiert, die Verschiebung der Elektronenhülle gegen die Kerne. Wie im letzten Absatz des Kapitel 2.2.5 beschrieben, bewirkt die Polarisierung eines Moleküls, dass das von anderen Molekülen wahrgenommene Feld wächst und es somit zu einer Rückkopplung zum ursprünglichen Molekül kommt. Diesen Sachverhalt beschreiben wir nun qualitativ. Für die lokale Polarisierung nehmen wir zunächst einen linearen Zusammenhang an, also

$$\mathbf{p}_{\text{ind}} = \alpha \cdot \mathbf{E}_{\text{loc}}, \quad (2.40)$$

wobei das lokale Feld am Ort eines induzierbaren Dipols durch die Überlagerung des ursprünglichen externen und des induzierten Feld

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{ind}} \quad (2.41)$$

gegeben ist. Nun wissen wir, dass das induzierte Feld $\mathbf{E}_{\text{ind}}$ linear mit dem Dipol anwächst. Diesem Sachverhalt tragen wir mit der Gleichung

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} = \kappa \cdot \mathbf{p}_{\text{ind}} \quad (2.42)$$

Rechnung, wobei κ ausdrückt, wie stark im Mittel ein Dipol an das elektrische Feld koppelt. Der Proportionalitätsfaktor κ hängt von der Dichte des Gases oder der Struktur eines Festkörpers ab. Seine Berechnung ist nicht ganz einfach aber nicht unmöglich. Nun können wir aus Gleichung (2.41) das lokale Feld eliminieren und erhalten

$$\frac{1}{\alpha} \mathbf{p}_{\text{ind}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \kappa \cdot \mathbf{p}_{\text{ind}}. \quad (2.43)$$

Letzte Gleichung können wir wiederum nach $\mathbf{p}_{\text{ind}}$ auflösen und erhalten folgenden Zusammenhang zwischen induziertem Dipol und dem durch externe Ladungen erzeugtes Feld

$$\mathbf{p}_{\text{ind}} = \left(\frac{1}{\alpha} - \kappa \right)^{-1} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}. \quad (2.44)$$

Sprich, das induzierte Dipolmoment in unserem Gas wächst bei endlicher Rückkopplung κ schneller an als bei isolierten Gasmolekülen. Ist κ sogar größer als $1/\alpha$, kommt es zur *Polarisationskatastrophe*. In anderen Worten, eine kleine Fluktuation eines Dipols wächst dann so stark an, dass sich spontan ein makroskopischer Dipol bildet. Den eben beschriebenen Rückkopplungsmechanismus kann man in etwa mit der akustischen Rückkopplung vergleichen, die langhaarige (60er–80er Jahre) oder tätowierte (90er–10er Jahre) Gittaristen mit großer Freude ihrem begeisterungsfähigen Publikum vorführen. Im übertragenen Sinne erhöhen die Gittaristen den Wert von κ über den von $1/\alpha$, wenn sie ihre Gitarre unterhalb eines kritischen Abstandes vor den Verstärker halten. Unsere kleine Theorie gilt offensichtlich nur für $\kappa < 1/\alpha$, denn ein Dipol mit einer dem lokalen E-Feld entgegengerichteter Orientierung ist sinnlos wie ein Leben ohne Mops. Um den Fall $\kappa > 1/\alpha$ zu beschreiben, müssten wir die Gleichung (2.43) um

nicht-lineare Terme erweitern, also z.B. um Rückstellkräfte, die mit der dritten Potenz der Auslenkung bzw. des Dipols anwachsen. Die entsprechende Rechnung hier durchzuführen sprengt zwar nicht den intellektuellen aber leider den zeitlichen Rahmen der Vorlesung. Deshalb wird es dazu eine Übungsaufgabe geben. Das Ergebnis wäre jedoch, dass es stabile Zustände mit endlichem Dipol geben kann, selbst wenn der Proportionalitätsfaktor $(1/\alpha - \kappa)$ negativ ist.

Ob die kleine Fluktuation, die im Falle einer großen Rückkopplung einen großen Dipol induziert, ein positives oder negatives Vorzeichen hat, lässt sich in aller Regel schlecht vorhersagen. Die Richtung des sich einstellenden Dipols kann deshalb genauso gut in positive wie in negative x -Richtung zeigen. Der Zufall spielt die entscheidende Rolle, wie bei einem Ball, den man genau auf die Spitze eines Berggrats legt und der irgendwann quasi zufällig in das eine oder in das andere Tal rollt. Man spricht dann von einem *spontanem Symmetriebruch*.

Materialien, die einen elektrischen Dipol in eine scheinbar zufällige aber zeitlich konstante Raumrichtung aufweisen, heißen **Ferroelektrika**. Sie sind quasi das elektrische Äquivalent zu den sehr viel bekannteren Ferromagneten. Ferroelektrika können – wie gewöhnliche Magneten auch – durch hinreichend große Felder umpolarisiert werden. Ferroelektrika werden in freier Wildbahn im Gegensatz zu Ferromagneten jedoch nicht direkt beobachtet. Das liegt daran, dass freie Ionen in Luft vorliegen, die sich auf der Oberfläche anlagern. Die freien positiven Ladungen gehen zum negativen Ende des Ferroelektrikums und umgekehrt. So wird dem Ferroelektrikum eine Tarnkappe zu verpasst. Eine entsprechende Entmagnetisierung von Magneten findet nicht statt, weil es keine magnetische Monopole und noch viel weniger *freie* magnetischen Monopole gibt. Weil freie Ladungen die Felder von Ferroelektrika verstecken, finden sie vorwiegend in integrierten Schaltungen technische Anwendung bzw. in anderen Bauelementen, in denen sie vor freien Ionen hermetisch abgeschirmt sind. Trotz ihres Namens enthalten Ferroelektrika kein Eisen. Der Name Ferro motiviert sich aus der formalen Analogie zu Ferromagneten.

2.4 Polarisation und dielektrische Permittivität

In Kapitel 2.3 haben wir gelernt, dass ein externes elektrisches Feld Dipole in einem Dielektrikum induziert. Aus makroskopischer Sicht ist es dabei nicht von Interesse, wie groß die Dipole einzelner Moleküle sind, sondern wie groß der gesamte Dipol je Volumenelement ist. Die entsprechende Größe heißt Polarisation und kann als Dipoldichte gemäss

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V} \sum_{i \in V} \mathbf{p}_i \quad (2.45)$$

definiert werden. Gleichzeitig wird das “makroskopische” elektrische Feld als das über die Umgebung von $\mathbf{r}$ über ein endliches Volumen V gemittelte mikroskopische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \int_V dV' \mathbf{E}_{\text{mikro}}(\mathbf{r}') \quad (2.46)$$

definiert. Dieses makroskopische Feld ist nicht mit dem lokalen elektrischen Feld zu verwechseln, das z.B. ein Dipol im Feld der anderen sieht, denn das makroskopische Feld beinhaltet das “innere” Feld des besagten Dipols, welches dem lokalen Feld entgegengesetzt ist. Werten wir den Mittelwert in einem dielektrischen Medium aus, ist der Mittelwert deshalb *kleiner* als das Feld, das man ohne dielektrisches Medium hätte. Weil die Theorie zum Elektromagnetismus zu Zeiten entwickelt wurde, als die atomare Struktur der Materie noch nicht bekannt war, versteht man im klassischen Elektromagnetismus unter dem Begriff elektrisches Feld (fast) immer das gemittelte und nicht das mikroskopische Feld.

Bei “gewöhnlichen” Dielektrika – also solchen, die z.B. weder ferro- noch piezoelektrisch sind – gibt es bei kleinen Feldern einen linearen Zusammenhang zwischen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{P}$, den man meist wie folgt ausdrückt:

$$\mathbf{P} = (\varepsilon_r - 1) \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}. \quad (2.47)$$

Dabei heißt die stoffabhängige Größe ε_r *relative Permittivität* oder auch *Permittivitätszahl*. Das Produkt $\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ heißt *Permittivität*. Je größer ε_r , desto größer ist die induzierte Dipoldichte bei gegebenem anliegenden Feld. Eine hohe Dichte an leicht zu orientierenden, permanenten Dipolen (Wasser) sowie an schwach gebundenen Ladungsträgern – seien es Elektronen oder Ionen – führen also zu einer hohen Polarisierbarkeit bzw. zu einer großen relativen Permittivität. Die Permittivitätszahlen einiger Materialien sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Vakuum	1	nichts Polarisierbares vorhanden
trockene Luft	1,00054	geringe Dichte an schwer induzierbaren Dipolen
Teflon	2,1	sehr steife Bindungen der Fl^-
Polyethylen	2,5	kleine Partialladungen, aber Polarisierbarkeit größer als in Teflon
Diamant	8	relativ dicht, mittelgroße Bandlücke
Germanium	16	kleinere Bandlücke als Diamant
Wasser	80	leicht polarisierbare, permanente Dipole
SrTiO_3	330	Quantenfluktuationen unterdrücken ferroelektrische Phase
Elektrolyte	∞	
Metalle	∞	

Tabelle 2.1: Relative Permittivitäten ausgewählter Materialien. Die Zahlenwerte sind insbesondere bei großen Werten von ε_r meist stark von der Temperatur und auch dem Druck abhängig.

Die Berechnung von ε_r aus mikroskopischen Prinzipien ist etwas komplizierter als unser Vorgehen im Kapitel 2.3, auch wenn dies schon wesentliche Züge einer vollständigen Rechnung aufweist. Das Ergebnis einer genaueren Herleitung ist als **Clausius-Mossotti-Gleichung** bekannt,

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} = \sum_i \frac{\rho_i \alpha_i}{3\varepsilon_0}, \quad (2.48)$$

wobei ρ_i und α_i (Zahlen-) Dichten und Polarisierbarkeiten der verschiedenen Dipolsorten sind – also z.B. in Luft die relativen Dichten von Stickstoff, Sauerstoff, und Wassermolekülen. Auch in dieser Gleichung kommt es – wie in unserer simplen Betrachtung – zu einem ins unendlich wachsenden ε_r , wenn das Produkt aus Dichten und Polarisierbarkeiten auf der rechten Seite der Gleichung (2.48) hinreichend groß wird.

Da Energien bzw. Energiedichten immer zentrale Größen darstellen, sollen die entsprechenden Ausdrücke hier noch eingeführt werden. Die Herleitung der entsprechenden Ausdrücke ist jedoch recht kompliziert ist, weshalb deshalb auf sie verzichtet werden soll. Stattdessen behelfen wir uns mit mechanischen Analogien. Das elektrische Feld spielt die Rolle einer treibenden Kraft. Die Permittivität ist so etwas wie eine inverse Federkonstante. Je größer ε_r , desto größer die “Auslenkung”, in unserem Falle die Polarisierung. Wir erwarten also einen Beitrag zur potenziellen Energie, der proportional zu $\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$ ist. Um die Einheit einer Energiedichte zu erhalten, muss dieser Ausdruck noch mit ε_0 multipliziert werden.

Eine genau Rechnung zeigt, dass die Dichte der Feldenergie v_{pot} (kleiner Buchstabe steht hier

für Dichte, also $v_{\text{pot}} = \Delta V_{\text{pot}}/V$) durch den Ausdruck

$$v_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (2.49)$$

gegeben ist, wobei die neu eingeführte Größe $\mathbf{D}$ durch

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.50)$$

definiert ist und elektrische Flussdichte oder auch dielektrische Verschiebung bzw. Verschiebungsdichte genannt wird. Sie entspricht bis auf den Vorfaktor ε_0 dem elektrischen Feld, das ohne die Polarisierung des Dielektrikums vorliegen würde.

In Medien, in denen Gleichung (2.47) eine gute Näherung darstellt, gilt somit

$$v_{\text{pot}} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \quad (2.51)$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} \mathbf{D}^2. \quad (2.52)$$

An dieser Stelle kann es hilfreich sein, Analogien zur Mechanik zu ziehen. Das elektrische Feld kann als treibende Kraft interpretiert werden, die dielektrische Verschiebung als Auslenkung und $\varepsilon_r \varepsilon_0$ entspräche einer inversen Steifigkeit oder Federkonstante.

Die oben angeführte Energiebilanz hat für Kondensatoren äußerst wichtige Konsequenzen, denn durch Einbringen eines Dielektrikums in einen Kondensator lässt sich seine Kapazität steigern. Betrachten wir einen Kondensator auf dessen Platten die Ladung $\pm Q$ aufgebracht ist. Schieben wir nun in diesen Kondensator ein Dielektrikum, erniedrigt sich die Feldenergie um den Faktor ε_r . Wenn wir nun die Gleichung $W = Q^2/2C$ zur Definition der Kapazität heranziehen, ergibt sich die Kapazität des Kondensators zu

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (2.53)$$

Ein Dielektrikum erhöht sozusagen den Quotienten A/d in einem Plattenkondensator um den Faktor ε_r . Bei gegebener Spannung kann somit mehr Feldenergie in einem Kondensator dank eines Dielektrikums mit großem ε_r gespeichert werden als ohne. Der Effekt dielektrischer Medien auf die Kapazität wurde experimentell von Faraday erforscht. Er bemerkte, dass bei geladenen Platten ($Q = \text{const}$, $U = \text{frei}$) die Spannung sank, wenn ein Dielektrikum zwischen die Platten eingeführt wurde. Umgekehrt beobachtete Faraday den Anstieg von Ladung, wenn das Dielektrikum bei anliegender Spannung ($U = \text{const}$, $Q = \text{frei}$) zwischen die Platten geschoben wurde.

2.5 Leiter und Widerstände

Sind in einem Material freie Ladungen vorhanden, werden diese von externen elektrischen Feldern beschleunigt, sodass elektrischer Strom fließt. In Metallen sind es erfahrungsgemäß Elektronen, die als freie Ladungsträger vorliegen. Bei Halbleitern können die Ladungsträger sowohl Elektronen als auch Elektronenlöcher sein. Anders als bei Metallen liegen in Halbleitern die freien Ladungsträger jedoch nur bei endlicher Temperatur vor. Ionen leiten den Strom in Elektrolyten. Zu dieser Klassifizierung mehr im nächsten Kapitel. Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden auf Elektronen und behandeln diese so, als könne man sie mit der klassischen Mechanik beschreiben.

2.5.1 Elektrischer Strom in Metallen und das ohmsche Gesetz

In diesem Kapitel erarbeiten wir uns ein Modell für die Bewegung von freien Ladungen bzw. Elektronen in einem externen elektrischen Feld und motivieren damit das bekannte ohmsche Gesetz. Wie fast alle anderen Freiheitsgrade auch, sind Elektronen stochastischen Stößen ausgesetzt, die im Mittel zu einer Art Stokes'schen Reibung führt.⁸ Damit ergibt sich folgende Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{el}} + \mathbf{F}_{\text{Reib}} \quad (2.54)$$

$$= q \cdot \mathbf{E} - \gamma \cdot \mathbf{v}, \quad (2.55)$$

wobei γ ein Dämpfungskoeffizient ist. Im statischen Grenzfall gilt $\mathbf{a} = 0$ und $\mathbf{E} = \text{konst}$, sodass sich folgende Driftgeschwindigkeit einstellt:

$$\mathbf{v} = \frac{q}{\gamma} \mathbf{E}. \quad (2.56)$$

Hier sei noch einmal daran erinnert, dass sich schon Ionen extrem schnell aufgrund externer Spannungen bewegen. Elektronen sind nun viele Größenordnungen leichter als Ionen und reagieren daher noch schneller auf externe Felder als Ionen. Deshalb kann Ihr Smartphone auch mit einer so viel größeren Frequenz operieren als unsere Gehirne. Im Folgenden wollen wir nun berechnen, zu welchem Strom die eben berechnete Driftgeschwindigkeit führt, wenn der Leiter den Querschnitt A hat und die Ladungsträger mit einer (Zahlen-) Dichte ρ im Leiter vorliegen, siehe dazu auch Abbildung 2.6. In unserem Beispiel sind alle Vektoren parallel zur x -Achse,

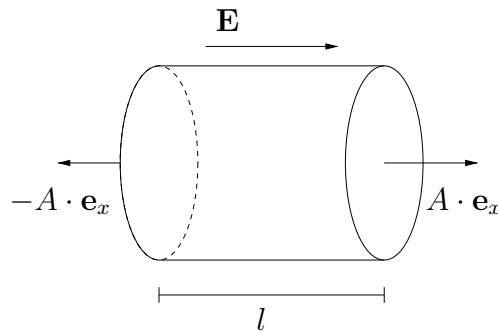


Abb. 2.6: Segment eines Leiters der Länge l und mit Querschnitt A . Das elektrische Feld $\mathbf{E}$ bewirkt eine Spannung $U = E \cdot l$ zwischen den beiden Endoberflächen.

sodass wir Vektoren durch Skalare bzw. durch die Beträge der Vektoren ersetzen können. Eine Ladung benötigt somit die Zeit $\Delta t = l/v$, um von der linken zur rechten Oberfläche zu gelangen. Die Anzahl der Ladungen, die durch die rechte Fläche in dieser Zeit austreten, ist dann

$$N = \rho \cdot (A \cdot l).$$

⁸Die stochastischen Stöße erfolgen insbesondere mit den Gitterschwingungen und weniger mit anderen Elektronen. Somit ist die Reibung relativ zum Inertialsystem des Materials und nicht – wie beim Fließen von Wasser – relativ zu anderen sich bewegendenden Freiheitsgraden. Im letzteren Fall wäre die Reibung proportional zur Krümmung des Geschwindigkeitsprofil und nicht relativ zu einem Laborsystem.

Somit ist $q \cdot N$ die gesamte Ladung, die in der Zeit Δt austritt. Der Strom ist definiert als Ladung durch eine Oberfläche je Zeiteinheit:

$$\underbrace{\frac{\Delta Q}{\Delta t}}_{\text{Strom: } I} = \frac{q \cdot N}{l/v} = \frac{q \cdot N}{l} \cdot v$$

$$= \underbrace{\left(\frac{q^2}{\gamma} \cdot \rho \right)}_{\substack{\text{Leitfähigkeit: } \sigma \\ \text{inverser Widerstand: } 1/R}} \cdot \underbrace{\frac{A}{l}}_{\text{geom. Eigensch.}} \cdot \underbrace{l \cdot E}_{\text{Spannung: } U} \quad (2.57)$$

$$(2.58)$$

Wir können also die Ausdrücke in unserer Stromgleichung so umgruppieren, dass wir das **Ohm'sche Gesetz** erhalten

$$U = R \cdot I. \quad (2.59)$$

Dabei ergibt sich der Widerstand R aus dem Produkt einer Materialeigenschaft, nämlich der **Leitfähigkeit** σ und einer geometrischen Eigenschaft, dem Quotienten A/l

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A}. \quad (2.60)$$

Die Leitfähigkeit ist eine Materialeigenschaft mit einer eigenen Einheit

$$[\sigma] = \frac{S}{m} = A/V \cdot \frac{1}{m}.$$

Die inverse Leitfähigkeit heißt **spezifischer Widerstand**. Sie hat das Symbol ρ aber keine eigene S.I. Einheit. Die Werte für die Leitfähigkeit variieren über viele Größenordnungen, wie Tabelle 2.2 zeigt. Die Leitfähigkeit insbesondere von Nichtleitern ist stark von der Temperatur

Material	Leitfähigkeit [S]	Klasse
Kohlenwasserstoffe	10^{-12} bis 10^{-21}	Nichtleiter/Isolator
Diamant	10^{-13}	Nichtleiter
undotiertes Si	$2,5 \cdot 10^{-4}$	Nichtleiter
dotiertes Si	$\approx 10^{-4} \leq \sigma \leq \approx 10^4$	Halbleiter
Tellur	$5 \cdot 10^{-3}$	
Leitungswasser	0,05	
Meerwasser	≈ 5	Elektrolyt
Aluminium, Kupfer, Gold	$\approx 3,5 \cdot 10^7$	Metalle
YBa ₂ Cu ₃ O _{7-x}	≈ 1 bei $T = 300$ K	Halbleiter
	∞ bei $T = 30$ K	Supraleiter

Tabelle 2.2: Werte für die Leitfähigkeit einiger Materialien – vorwiegend bei Raumtemperatur.

T abhängig. Weil die Anzahl der freien Ladungsträger bei ihnen mit T sehr schnell zunimmt, wächst auch ihre Leitfähigkeit schnell an. Bei Metallen hingegen sinkt die Leitfähigkeit mit wachsender Temperatur, weil Gitterschwingungen mit der Amplitude zunehmen, sodass die Elektronen stärker an ihnen streuen.

Wärmeentwicklung im Leiter

Fließt durch einen Leiter mit endlichem elektrischen Widerstand Ladung hindurch, entsteht dabei die sogenannte joulesche Wärme. Diese berechnet sich wie folgt:

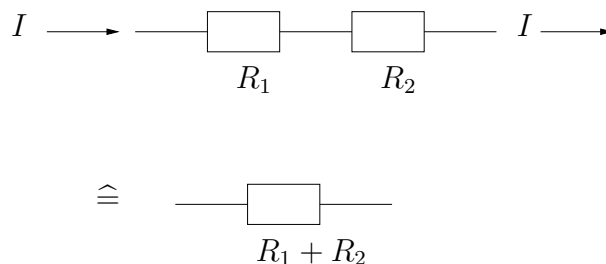
$$\Delta W = U \cdot \Delta Q$$
$$(\text{ mit } \Delta Q = I \cdot \Delta t) \rightarrow = U \cdot I \Delta t.$$

Verlorene Energie pro Zeiteinheit (Leistung):

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}.$$

2.5.2 Serien- und Parallelschaltung von Widerständen

Wie Kondensatoren können auch Widerstände miteinander verschaltet werden. Sind zwei Widerstände in Serie geschaltet, fließt durch beide derselbe Strom I . Somit gilt:

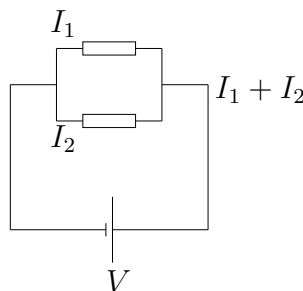


$$U = U_1 + U_2 \quad \Rightarrow \quad U = (R_1 + R_2) \cdot I.$$

In Serie geschaltete Widerstände addieren sich.

$$R_{\text{Serie}} = R_1 + R_2 \quad (2.61)$$

Diese Einsicht hätten wir an und für sich bereits Gleichung (2.60) entnehmen können, weil das parallele Schalten zweier identischer Widerstände im Wesentlichen einer Verdoppelung der Länge l entspricht. Sind zwei Widerstände hingegen parallel geschaltet, so liegt an beiden dieselbe Spannung U an.



$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$

$$I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot U$$

$$I_{\text{ges.}} = \frac{1}{R_{\text{ges.}}} \cdot U$$

Man findet also:

$$R_{\text{parallel}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}.$$

Die Kehrwerte parallel geschalteter Widerstände addieren sich zum Kehrwert des Gesamtwiderstandes:

$$R_{\text{parallel}}^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}. \quad (2.62)$$

Wie bei der Serienschaltung hätten wir die Regel für die Parallelschaltung von Widerständen prinzipiell Gleichung (2.60) entnehmen können: Die Parallelschaltung zweier identischer Widerstände entspricht der Verdoppelung des Querschnitts A eines einzelnen Widerstandes.

Widerstände von Rotationskörpern

Obgleich Widerstände als elektrisches Element fast immer zylindrisch geformt sind, haben viele Bauteile, die z.B. Wärme⁹ statt elektrischen Strom leiten, keine zylindrische sondern eine allgemeinere Form. Die erste Verallgemeinerung bzgl. eines zylindrischen Widerstandes ist ein Rotationskörper, mit einem Radius von z abhängigen Radius $r(z)$. Einen solchen Körper kann man in kleine Segmente mit Widerstand

$$\Delta R_n = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\Delta z_n}{\pi r^2(z_n)}$$

zerlegen. Der Gesamtwiderstand ergibt sich aus der Summe über Einzelwiderstände. Beim Übergang einer diskreten zur kontinuierlichen Beschreibung wird aus der Summe ein Integral, sodass

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \frac{1}{\pi r^2(z)}.$$

2.6 Klassifizierung der Materie nach elektrischen Eigenschaften

Die Art und Weise, wie Materie auf elektrische Felder reagiert, ist sehr facettenreich und die Einteilung basierend auf den elektrischen Eigenschaften in gewissem Maße etwas willkürlich. Dies ist insbesondere deshalb so, weil es keine scharfen Grenzen zwischen Leitern, Halbleitern und Nichtleitern gibt. Das wiederum liegt u.a. daran, dass Elektronen nicht in ihrem (quantenmechanischen) Grundzustand vorliegen sondern mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit in das Leitungsband springen. Bei einer Bandlücke von $\Delta E = 5,4 \text{ eV}$ (Diamant) oder $0,67 \text{ eV}$ (Germanium) wäre die relative Wahrscheinlichkeit dafür in etwa $\exp(-\Delta E/k_B T)$, was somit für Diamant ($1,5 \cdot 10^{-91}$) zwar extrem klein ist, aber eben nicht mathematisch identisch null. Auch bei Germanium ist die Wahrscheinlichkeit mit $5,4 \cdot 10^{-12}$ sehr klein, aber bei einem Mol

⁹Die mathematische Beschreibung der Wärmeleitung ist der elektrischen Leitung ähnlich.

Leitungsträger kommt dann doch die nicht ganz zu vernachlässigende Anzahl von $3 \cdot 10^{12}$ freien Ladungsträgern zusammen. Die hier eingefügte Tabelle gibt einen kleinen Überblick über die Klassifizierung von Materialien nach ihren elektrischen Eigenschaften. Zu jedem Material gibt

Leiter					
freie Ladungsträger liegen intrinsisch vor					
dominante Ladungsträger: Elektronen		dominante Ladungsträger: Ionen, oft freie Protonen		Ladungsträger: freie Elektronen und Ionen	
normale Metalle	Supraleiter	flüssige, feste Elektrolyte		Plasmen	
weitere (halb-) leitende Materialien					
Halbmetall nur eine Spin-Orientierung		Semimetall neg. (indirekte) Bandlücke		Graphen Bandlücke genau gleich null	
Halbleiter					
thermisch aktivierte Ladungsträger					
elektronische Halbleiter	dotierte Halbleiter	Lochleiter	Element- Halbleiter	an/organische Halbleiter	in/direkte Halbleiter
Dielektrika					
kaum freie Ladungsträger					
gewöhnliche Dielektrika: Luft, Papier	Ferro- Elektrika: besitzen permante el. Dipole	Antiferro- Elektrika:	Piezo- Elektrika: feste Polarisation	Pyro- Elektrika: feste Polarisation	topologische Isolatoren: Oberflächen leiten nur

Tabelle 2.3: Übersicht über die Klassifizierung der Materie nach elektrischen Eigenschaften

es viel Interessantes zu berichten, insbesondere wenn es darum geht, die atomaren und elektronischen Wechselwirkungen sowie Symmetrien auf der atomaren Skala mit den makroskopischen Eigenschaften in Verbindung zu bringen. Für jede hier aufgeführte Materialklasse kann man problemlos ein ganzes Semester füllen – im Falle der Supraleiter sogar etliche Jahre – deshalb hier nur ein paar wenige elementare Kommentare. Ferroelektrika besitzen einen endlichen Dipol, weil sich ein Ionen-Untergitter gegen ein anders geladenes Untergitter verschiebt. Es gibt aber auch Ferroelektrika, in denen der Symmetriebruch durch die Verschiebung von Elektronen getrieben wird. Wenn sich nur ein Untergitter verschiebt sondern zwei und zwar dergestalt, dass sich die durch die Verschiebung bedingten Dipolmomente genau auslöschen, spricht man von Antiferroelektrika. Und nun haben wir die zugegebener Maßen etwas exotischen (anti-) ferroelektrischen Materialien noch gar nicht erwähnt. Etwas absurd erscheint vielleicht, dass Ferroelektrika zwar piezoelektrisch sind, aber dennoch nicht als Piezoelektrika bezeichnet werden. Ferroelektrika können nämlich im Gegensatz zu Piezoelektrika durch ein externes elektrisches Feld umpolarisiert werden. Gegenstand aktueller Forschung sind Graphen – einzelne Schichten aus Graphit – sowie topologische Isolatoren. Wenn Sie mit wenig Aufwand und wenig Inhalt eine Publikation in einem führenden wissenschaftlichen Magazin erhalten wollen, fangen Sie am besten sofort an, sich für diese Materialien zu interessieren.

3 Elektrische Schaltungen

Einzelne Bauelemente wie Batterien, Widerstände, Kondensatoren und Spulen aber auch komplexere Bauelemente wie Transistoren, Operationsverstärker oder sogar Monitore werden zu einer Anordnung in einer elektrischen Schaltung zusammengeschlossen. Elektrische Schaltungen können aus einem oder mehreren Schaltkreisen bestehen. Ihre schematische Darstellung erfolgt über Schaltpläne, in denen die einzelnen Bauelemente in der Regel idealisiert dargestellt werden. So würde einem Kondensator nur eine Kapazität aber kein Widerstand zugeordnet, obgleich natürlich kaum ein Kondensator aus Supraleitern besteht und somit ohmsche Verluste bei seinem Laden oder Entladen unvermeidbar sind. In der Regel ist dieser Widerstand aber gegenüber den explizit verwendeten Widerständen zu vernachlässigen, oder aber man beschreibt den realen Kondensator als Serienschaltung eines idealen Kondensators mit einem idealen Widerstand. Das eben beschriebene Vorgehen erlaubt es uns, einfache Schaltungen quantitativ zu beschreiben. Sobald die Schaltungen eine gewisse Komplexität erreichen, z.B. wenn in einer Schaltung mehrere elektrische Energiequellen vorhanden sind, bedarf es formaler Regeln, mit Hilfe derer wir die zu lösenden Gleichungen aufzustellen. Womit wir gleich beim Thema wären.

3.1 Kirchhoffsche Regeln

3.1.1 Knotenregel

Die 1. kirchhoffsche Regel ist die Knotenregel: „In jeden Knoten (Verzweigungspunkt) fließt immer so viel Ladung hinein wie heraus.“:

$$\sum_{n \in \text{rein}} I_n = \sum_{n \in \text{raus}} I_n \quad (3.1)$$

bzw. wenn wir ein und ausfließenden Ladungen bzw. Strömen unterschiedliche Vorzeichen σ_n zuordnen

$$\sum_n \sigma_n I_n = 0. \quad (3.2)$$

Bei der Anwendung der Knotenregel muss man also darauf achten, welche Richtung dem Strom in welchem Stromzweig formal zugewiesen wird. Der tatsächliche Stromfluss im Stromzweig n ist dabei der zugewiesenen Richtung entgegengesetzt falls $I_n < 0$. In Abb. 3.1 fließen (formal) $I_{1,2}$ in den Knoten hinein und $I_{3,4}$ heraus. Damit gilt gemäß der Knotenregel

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0. \quad (3.3)$$

Die kirchhoffsche Knotenregel haben wir bereits implizit bei der Herleitung des Gesamtwiderstandes zweier parallel geschalteter Widerstände im Abschnitt 2.5.2 verwendet. Diese Herleitung lässt sich zwanglos auf beliebig viele Widerstände verallgemeinern.

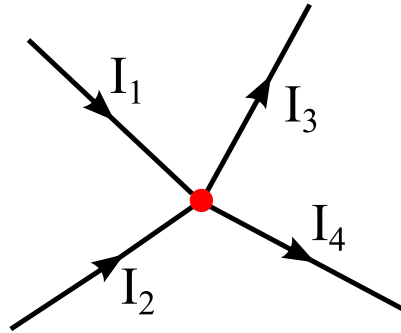
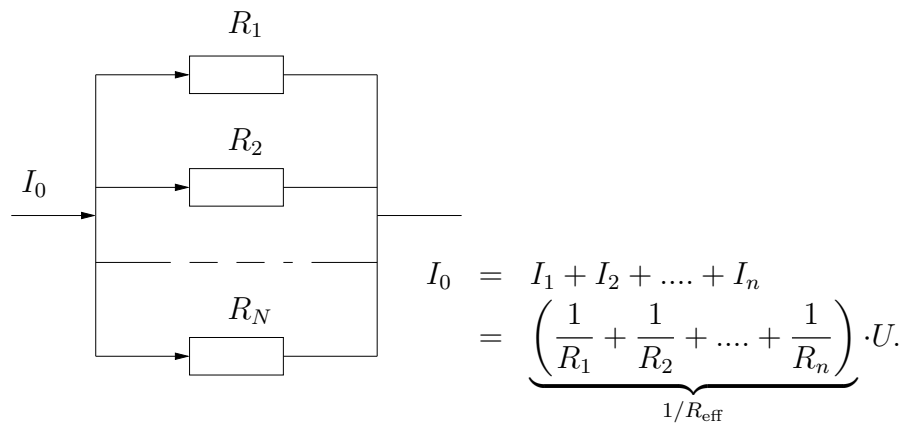


Abb. 3.1: Darstellung des elektrischen Stroms durch einen Knotenpunkt



Für parallel geschaltete Widerstände gilt somit:

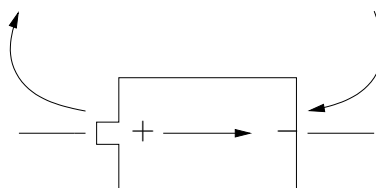
$$\frac{1}{R_{\text{eff}}} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{R_n}. \quad (3.4)$$

3.1.2 Maschenregel

Die 2. kirchhoffsche Regel ist die Maschenregel: „Die Summe über alle Spannungen in einem geschlossenen Kreis ist gleich null.“:

$$\sum_{n \in \text{Masche}} U_n = 0. \quad (3.5)$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als die diskretisierte Version der Gleichung $\oint d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = 0$. Auch die Spannung U_n eines jeden Stromzweigs hat wie der Strom eine Richtung. Sind die beiden Richtungen identisch gewählt (sogenanntes *Verbraucherzählpfeilsystem*), wird das übliche ohmsche Gesetz verwendet. Ansonsten (also im *Erzeugerzählpfeilsystem*) wird dem ohmschen Gesetz ein Vorzeichen spendiert, sodass $U_n = -R \cdot I_n$.



Eine scheinbare Besonderheit haben Spannungsquellen zu bieten. Ihrer Spannung wird sowohl im Inneren als auch im Äußeren eine Richtung zugeordnet und zwar vom positiven zum negativen Pol, da dies der Richtung der elektrischen Feldlinien entspricht. Somit kann man die Maschenregel auch wie folgt schreiben:

$$\sum_n U_n = 0 \quad (3.6a)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \text{passiv}} U_n + \sum_{n \in \text{aktiv}} U_n^{\text{intern}} = 0 \quad (3.6b)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \text{passiv}} U_n = - \sum_{n \in \text{aktiv}} U_n^{\text{intern}} \quad (3.6c)$$

$$\sum_{n \in \text{passiv}} U_n = \sum_{n \in \text{aktiv}} U_n^{\text{extern}}. \quad (3.6d)$$

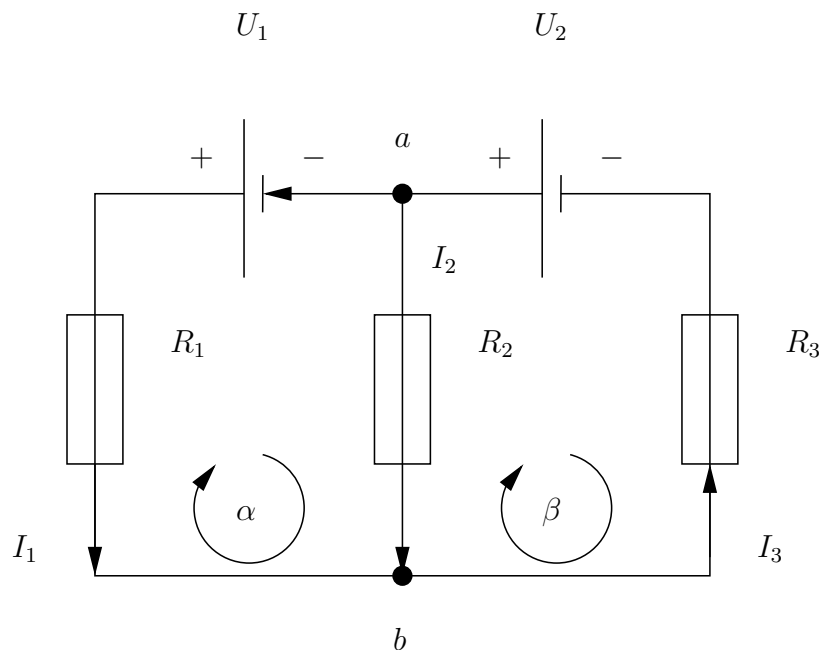
Bei den bisher gesehenen, einfachen Schaltungen mit nur einer Masche verwendet man implizit die Maschenregel aus Gleichung (3.6d) bei komplizierteren Schaltungen jedoch Gleichung (3.6a) bzw. (3.6b), sodass man keine Zeit damit vergeuden muss, sich über Vorzeichen Gedanken zu machen.

3.1.3 Gleichstromschaltungen

Die konsequente Anwendung der kirchhoffschen Regeln – zusammen mit dem ohmschen Gesetz – erlaubt es uns, genauso viele (linear unabhängige) Gleichungen aufzustellen, wie wir Unbekannte haben. Die Vorgehensweise soll nun an zwei Gleichstromschaltungen erläutert werden. Die einzelnen Schritte sind: Jede Masche erhält einen *Maschenumlaufsinn*, der meist im Uhrzeigersinn gewählt wird. Dann werden den einzelnen Bauelementen ihre Spannungsabfälle zugeordnet. Schließlich werden die beiden kirchhoffschen Regeln ausgewertet.

Schaltung mit zwei Spannungsquellen

Wir betrachten folgende Schaltung, die jeweils mehr als eine Masche, einen Knotenpunkt und eine Spannungsquelle aufweist. Sie kann als eine (Anti-) Parallelschaltung zweier realer Batterien (U_1 mit Innenwiderstand R_1 und U_2 mit Innenwiderstand R_3) an einem externen Verbraucher (R_2) interpretiert werden. Das Ziel ist die Stromstärke I_2 als Funktion der Spannungen U_1 und U_2 am Verbraucher R_2 zu bestimmen.



Falls Sie nichts wichtigeres zu tun hatten, konnten Sie bei der Erstellung der obigen Abbildung in der Vorlesung folgenden Handlungsablauf live miterleben: Zunächst wurde den beiden inneren Maschen, α und β , eine Umlaufrichtung zugeordnet. Als nächstes wurden die Stromzählpfeile eingezeichnet. Erst danach werden wir die Kirchhoffschen Regeln aus. Die Knoten a und b enthalten dieselbe Information, deshalb betrachten wir hier nur a :

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0. \quad (3.7)$$

Als nächstes geht es den Maschen an den Kragen:

$$U_1 + R_2 \cdot I_2 - R_1 \cdot I_1 = 0 \quad (3.8)$$

$$U_2 - R_3 \cdot I_3 - R_2 \cdot I_2 = 0. \quad (3.9)$$

Wir haben nun drei (linear unabhängige) Gleichungen und drei Unbekannte (I_1 , I_2 , I_3) also Friede, Freude, Eierkuchen. Vorausgesetzt wir können Gleichungssysteme lösen. Im gegebenen Fall ist dies in der Tat kein Hexenwerk, da wir sukzessive I_3 und I_1 eliminieren können, um nach dem gesuchten I_2 aufzulösen. Im späteren Leben macht es aber durchaus Sinn, ein Gleichungssystem aufzustellen, zumal man dieses dann an einen Computer verfüttern kann, der es etwa 10^9 mal schneller lösen kann als wir und dabei auch noch zuverlässig ist. Im Allgemeinen wird ein Gleichungssystem am besten so aufgestellt, dass alle Unbekannten jeweils in einer Spalte untereinander stehen. Hier also:

$$\begin{array}{rrrrrcl} -1 \cdot I_1 & - & 1 \cdot I_2 & + & 1 \cdot I_3 & = & 0 \\ -R_1 \cdot I_1 & + & R_2 \cdot I_2 & & & = & -U_1 \\ & & R_2 \cdot I_2 & + & R_3 \cdot I_3 & = & U_2 \end{array} \quad (3.10)$$

oder aber in Matrizenschreibweise

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & +1 \\ -R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Spätestens jetzt sollten Sie einsehen, dass lineare Algebra in MINT Fächern durchaus ihre Daseinsberechtigung hat. Um nun nach I_2 aufzulösen, können Sie, wie bereits erwähnt, entweder

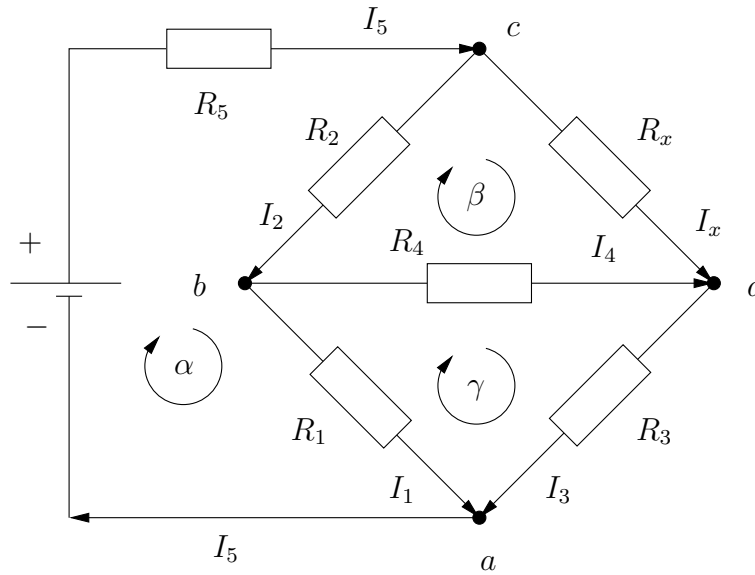
in dem Gleichungssystemen I_1 und I_3 eliminieren. Oder aber Sie verwenden die Tricks aus der linearen Algebra zur Invertierung einer Matrixgleichung. Sie sollten beide Vorgehensweisen *selbstständig* üben. Dann haben Sie u.U. auch mal wieder ein kleines Erfolgserlebnis. Das Ergebnis sollte dann

$$\left(R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}\right) I_2 = U_2 - \frac{R_3}{R_1} U_1 \quad (3.12)$$

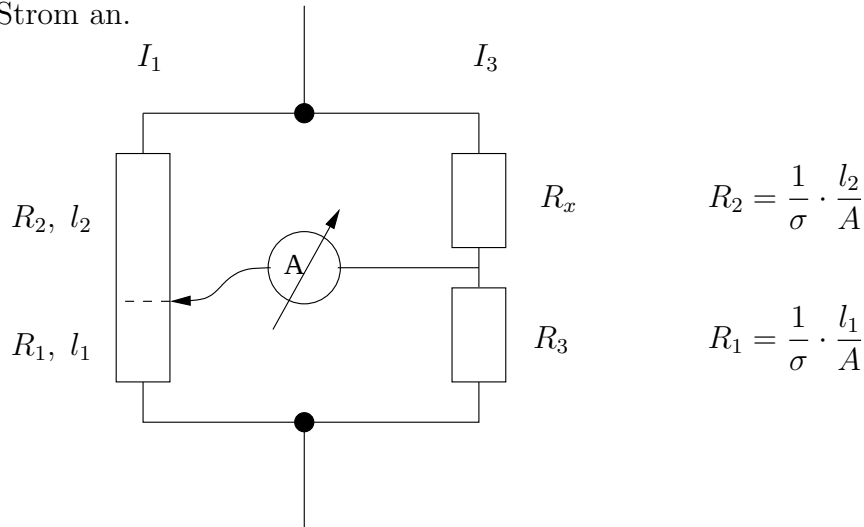
sein. Auch im Bereich der Elektronik können und sollten wir unser Ergebnis sowohl auf Einheiten als auch auf Grenzfälle hin überprüfen, um mögliche Fehler zu entdecken. Sprich, sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite der Gleichung müssen alle Ausdrücke die Einheit Volt haben. Zudem könnten wir z.B. den Grenzfall $R_3 \rightarrow \infty$ betrachten. Die Masche β fällt dann aus der Rechnung heraus, sodass man $I_2 = -U_1/(R_1 + R_2)$ direkt dem Schaltungsbild entnehmen kann. Dies können wir auch aus der Gleichung (3.12) ableiten, indem wir sie mit dem Quotienten R_1/R_3 multiplizieren und dann alle Terme, die gegen null gehen, wegstreichen. Ganz analog hätten wir auch $R_1 \rightarrow \infty$ aber eben so gut ohne allzu viel Aufwand $R_2 \rightarrow \infty$ analysieren können. Ist auch nur ein einziger Test negativ, haben wir irgendwo einen Fehler gemacht, der manchmal natürlich auch im Test liegt. Grenzfälltests dieser Art kann man übrigens in jedem Schritt einer Rechnung machen, was dabei helfen kann, Rechenfehler dingfest zu machen. Es spricht gegen Ihre Intelligenz und/oder innere Einstellung zum Studium, sollten Sie dies erst in Klausuren üben. Da Sie heute schon ungefähr 83 mal What's App, E-Mail, Twitter oder Spiegel Online gecheckt haben, können Sie Zeitmangel nicht als Ausrede heranziehen. Als kleines Zahlenbeispiel für die Schaltung nehmen wir mit $U_1 = 12\text{ V}$ und $R_1 = 2\ \Omega$ typische Zahlenwerte für Spannung und Innenwiderstand einer Autobatterie und mit $U_2 = 1,5\text{ V}$ und $R_3 = 0,03\ \Omega$ solche für eine niedliche Mignonzelle, die auch unter dem unästhetischen Namen AA Batterie bekannt ist. Als "externen Verbraucher" wählen wir $R_2 = 1\text{ k}\Omega$, der somit sehr viel größer ist als die Innenwiderstände. Wir sehen, dass Gleichung (3.12) auch als $R_{2,\text{eff}} I_2 = U_{2,\text{eff}}$ geschrieben werden kann. Die effektive Spannung $U_{2,\text{eff}}$ ergibt sich zu dem Wert $\{1,5 - (0,03/2) 12\}\text{ V} = 1,32\text{ V}$, der noch relativ nahe an der Spannung der AA Batterie liegt. Bei Parallelschaltungen von Batterien dominieren damit sozusagen diejenigen mit dem kleineren inneren Widerstand. Außerdem liegt im gegebenen Beispiel der effektive Lastwiderstand $R_{2,\text{eff}} = (1000 + 0,03 + 1000 \cdot 0,03/2)\ \Omega \approx 1015\ \Omega$ noch recht nahe bei dem ursprünglichen Lastwiderstand. Als krönender Abschluss dieses Beispiels sei erwähnt, dass wir so manche Schaltung natürlich auch auf Symmetrien hin abklopfen können. Schließlich wollen wir die heilige Dreifaltigkeit aus Einheit, asymptotischem Grenzfall und Symmetrie nicht unvollständig lassen. Im gegebenen Fall wäre dies eine "echte Parallelschaltung" zweier identischer, realer Batterien am Lastwiderstand R_2 , die wir durch die Wahl $U_1 = -U_2$ und $R_1 = R_3$ realisieren. Damit reduziert sich Gleichung (3.12) zu $(2R_2 + R_1)I_2 = 2U_2$. In anderen Worten, durch Parallelschaltung identischer Batterien verringert sich ihr Gesamtverlust, weil die inneren Widerstände parallel geschaltet sind.

Wheatstone'sche Brücke

Die Wheatston'sche Brücke ist eine Messanordnung zur Bestimmung ohmscher Widerstände. Sie wurde nach dem britischen Physiker Charles Wheatstone benannt, der die Messanordnung zwar nicht erfand aber verbreitete. In der gezeigten Abbildung ist der Widerstand R_x unbekannt, wohingegen sich das Verhältnis der Widerstände R_1 zu R_2 bei gegebenem Gesamtwiderstand von $R_1 + R_2$ in einem Schiebewiderstand kontinuierlich verändern lässt.



Zur mathematischen Untersuchung der Brücke könnten wir ein Gleichungssystem für die sechs unbekannten Stromstärken I_n mit $n = 1, \dots, 6$ aufstellen. Dazu müssten wir die drei inneren und somit unabhängigen Maschen α , β und γ auswerten sowie drei linear unabhängige Knoten also z.B. b , c und d . Das machen wir aber als Übungsaufgabe. Stattdessen fokussieren wir uns auf die Frage, wie wir den Schiebewiderstand einstellen müssen, damit kein Strom über die Brücke – also den Widerstand R_4 – fließt. Man sagt, die Brücke ist abgeglichen. Ersetzen wir R_4 durch ein Strommessgerät, auch Amperemeter genannt, zeigt dieses also bei abgeglichener Brücke keinen Strom an.



Zur mathematischen Behandlung beziehen wir uns auf die erste Abbildung. Wenn I_4 verschwindet, sind die Knoten b und c schnell ausgewertet: $I_1 = I_2$ und $I_x = I_3$. Die Auswertung der Maschen β und γ liefern

$$R_x \cdot I_3 - R_2 \cdot I_1 = 0 \quad (3.13a)$$

$$R_3 \cdot I_3 - R_1 \cdot I_1 = 0. \quad (3.13b)$$

Beide Gleichungen können nach I_3 aufgelöst werden, womit wir die Bedingung für eine abgeglichene Brücke erhalten

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} \cdot R_3. \quad (3.14)$$

Um eine möglichst gute Auflösung des zu messenden Widerstandes R_x zu erhalten, sollte der Widerstand R_3 in etwa der Größenordnung von R_x entsprechen.

3.2 RC-Kreise

Unsere Schaltungen bestanden bisher lediglich aus Spannungsquellen und passiven Bauelementen einer Art, also nur Widerständen oder nur Kondensatoren, an die jeweils Spannungsquellen angeschlossen sind. Die meisten Schaltungen enthalten natürlich verschiedene Bauelemente. Im einfachsten Fall, an dem man bereits eine Menge über komplexere Schaltungen lernen kann, besteht der Stromkreis aus einer Masche mit einer Batterie, einem Widerstand und einem Kondensator. Dieser Stromkreis wird auch als RL-Kreis bezeichnet.

Die Maschenregel für einen solchen Stromkreis lautet

$$R \cdot \dot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = U(t). \quad (3.15)$$

Somit hätten wir (abgesehen von unserem Elektron im Kondensator) das erste Beispiel einer Differentialgleichung (DGL), also einer Gleichung, in der nicht nur die gesuchte Funktion vorkommt, in diesem Fall $Q(t)$, sondern auch ihre Ableitungen. Viele, wenn nicht die meisten Beschreibungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften basieren auf DGLs, die somit ein wichtiges Feld der angewandten Mathematik darstellen.

Wie man eine DGL löst, hängt von ihrer Art ab. Zum Glück haben wir es in dieser Vorlesung ausschließlich mit linearen DGLs zu tun, in denen die gesuchte Funktion nur linear vorkommt, also nicht in Form ihres Quadrats oder ihre Wurzel. Zudem sind die Vorfaktoren vor Q , $\dot{Q}$ und später $\ddot{Q}$ Konstanten und keine Funktionen der Zeit. Lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten können dank relativ einfacher “Kochrezepte” gelöst werden. Diese Rezepte müssen allerdings – ähnlich wie das Eierkochen – geübt werden. Prinzipiell sind uns die Differentialgleichungen dieses Kapitels bereits in der Mechanik begegnet. Deshalb ist der Stoff hier nicht ganz neu. Allerdings ist der Kontext ein anderer. Weil gedämpfte Schwingungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften eine zentrale Rolle spielen, tut es nicht weh, den Stoff hier zu wiederholen.

Entladen eines Kondensators im RC-Kreis

Zunächst betrachten wir die homogene DGL, sodass $U(t) = 0$. Wir haben also einen geschlossenen Schalter und keine Batterie bzw. eine Batterie mit Spannung null. Zur Lösung der DGL gehen wir wie im Mathe-Begleitskript vor. Dazu machen wir den Ansatz

$$Q(t) = Q_0 e^{-\lambda t}, \quad (3.16)$$

der zur Gleichung

$$\left(-\lambda R + \frac{1}{C}\right) e^{-\lambda t} = 0 \quad (3.17)$$

führt, sodass $\lambda = 1/RC$ bzw.

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}. \quad (3.18)$$

Man kann die Lösung auch als

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$$

schreiben, wobei τ die Rolle einer *Relaxationszeit*

$$\tau = R \cdot C.$$

einnimmt. Sie ist die Zeit, die der Kondensator im RC-Kreis benötigt, um seine Ladung auf das $1/e$ -fache des momentanen Wertes zu reduzieren.

Wird die Anfangsbedingung zu einer beliebigen Zeit t_0 angegeben, können wir die freie Variable Q_0 gemäß

$$Q_0 = Q(t_0) \cdot e^{t_0/RC} \quad (3.19)$$

festlegen.

Laden eines Kondensators im RC Kreis

Der einfachste Fall einer inhomogenen DGL liegt vor, wenn die rechte Seite der DGL eine Konstante der Zeit ist, also $U(t) = U_0$. Speziell betrachten wir eine Situation, in der der Kondensator zur Zeit $t < 0$ nicht geladen war und die Spannung zur Zeit $t = 0$ angelegt wird. Die Lösung der heterogenen DGL kann nach Schema F gehen – oder aber wir erkennen intuitiv, dass

$$Q_p(t) = C \cdot U_0 \quad (3.20)$$

eine partikuläre Lösung darstellt. Die allgemeine, vollständige Lösung lautet somit

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} + C \cdot U_0. \quad (3.21)$$

Mit der Anfangsbedingung $Q(t = 0) = 0$ erhalten wir $Q_0 = -C \cdot U_0$, sodass

$$Q(t) = C \cdot U_0 (1 - e^{-t/\tau}). \quad (3.22)$$

Periodisch getriebener RC Kreis

Wir betrachten nun eine externe Spannung, die zeitlich periodisch oszilliert, also z.B.

$$U(t) = U_\omega \cos(\omega t) \quad (3.23a)$$

$$= \Re \{ U_\omega e^{i\omega t} \}. \quad (3.23b)$$

Wir lösen zunächst das komplexe Problem. Dazu machen wir den Ansatz

$$Q(t) = Q_\omega e^{i\omega t} \quad (3.24)$$

und erhalten nach Einsetzen in die Gleichung (3.15)

$$\left(i\omega R + \frac{1}{C} \right) Q_\omega e^{i\omega t} = U_\omega e^{i\omega t}, \quad (3.25)$$

sodass

$$Q_\omega = \frac{U_\omega}{i\omega R + 1/C}. \quad (3.26)$$

Somit ist die komplexe Lösung

$$Q(t) = \frac{U_\omega}{i\omega R + 1/C} e^{i\omega t}, \quad (3.27)$$

von der wir aber nur den Realteil benötigen:

$$\Re\{Q(t)\} = U_\omega \cdot \Re \left\{ \frac{1/C - i\omega R}{1/C^2 + \omega^2 R^2} \cdot (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right\} \quad (3.28)$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung erweitern wir mit C^2 , ersetzen dann jedes Produkt $C \cdot R$ mit τ und behalten nur die reellen Terme. Damit ist die gesuchte reelle Lösung

$$\Re\{Q(t)\} = C \cdot U_\omega \cdot \left(\frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2 \tau^2} + \frac{\omega \tau \sin \omega t}{1 + \omega^2 \tau^2} \right). \quad (3.29)$$

Frequenzabhängige Kapazität und Impedanz

Für kleine Anregungsfrequenzen $\omega\tau \ll 1$ dominiert der erste Term, sodass die Lösung der DGL die Gleichung $Q(t) \approx C \cdot U(t)$ erfüllt. Der RC-Kreis verhält sich somit für $\omega\tau \ll 1$ ganz ähnlich wie ein reiner Kondensator. Für kleine Frequenzen dominiert jedoch der zweite Summand auf der rechten Seite der Gleichung (3.29). Man kann dann – siehe Hausaufgaben – in ein, zwei Schritten zeigen, dass das ohmsche Gesetz näherungsweise gilt, also $\dot{Q}(t) \approx U(t)/R$.

Um diesen Punkt zu vertiefen, betrachten wir noch einmal Gleichung (3.26), schreiben diese aber wie folgt um:

$$Q_\omega = C \cdot \left(\frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} - \frac{i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right) U_\omega \quad (3.30)$$

und führen die frequenzabhängige Kapazität ein

$$C_\omega = C \cdot \left(\frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} - \frac{i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right). \quad (3.31)$$

Letztere Größe erfüllt die Gleichung

$$Q_\omega = C_\omega U_\omega, \quad (3.32)$$

die somit die Gleichung $Q = C \cdot U$ vom statischen Grenzfall auf endliche Frequenzen verallgemeinert.

C_ω kann in seinen Realteil C'_ω und seinen Imaginärteil C''_ω aufgeteilt werden. Dabei spiegelt der Imaginärteil die ohmschen Verluste wider, wohingegen der Realteil angibt, wieviel Energie im Kondensator gespeichert wird. In der Mechanik viskoelastischer Medien wäre der komplexe Schubmodul $G(\omega)$ eine verwandte Größe, die in einen Speichermodul $G'(\omega)$ – den Realteil von $G(\omega)$ – und einen Verlustmodul $G''(\omega)$ – den Imaginärteil – zerlegt werden kann.

In der Elektrotechnik rechnet man im Allgemeinen nicht mit frequenzabhängigen Kapazitäten sondern eher mit frequenzabhängigen Widerständen bzw. **Impedanzen**. Da der Strom die Ableitung der Zeit ist, gilt

$$I(t) = \underbrace{i\omega Q_\omega}_{\equiv I_\omega} e^{i\omega t}. \quad (3.33)$$

Wir erweitern nun die linke Seite in Gleichung (3.25) mit $i\omega$ und kürzen die Phasenfaktoren $\exp(i\omega t)$ heraus, sodass wir die Verallgemeinerung des ohmschen Gesetzes für endliche Frequenzen erhalten, nämlich

$$\underbrace{\frac{i\omega R + 1/C}{i\omega}}_{R_\omega} \underbrace{i\omega Q_\omega}_{I_\omega} = U_\omega. \quad (3.34)$$

Den frequenzabhängigen Widerstand, den wir aber nicht mehr als R_ω sondern als Impedanz $Z(\omega)$ schreiben, ist somit

$$Z(\omega) = R + \frac{1}{i\omega C} \quad (3.35)$$

$$= R \cdot \left(1 - \frac{i}{\omega\tau} \right) \quad (3.36)$$

Das Bemerkenswerte an Gleichung (3.35) ist, dass sie der Regel für die Serienschaltung von Widerständen genügt, wenn wir der Kapazität formal einen Widerstand – oder genauer gesagt eine Impedanz – von $Z_C(\omega) = 1/i\omega C$ zuordnen. Da auch bei Parallelschaltungen von Impedanzen die Regel für die Parallelschaltung von Widerständen übernommen werden kann, sind wir bereits jetzt prinzipiell in der Lage, eine komplexe Schaltung aus Widerständen und Kondensatoren zu beschreiben, wenn sie mit einer periodischen Spannung getrieben wird.

3.3 Induktivität und RL-Kreise

In diesem Abschnitt führen wir die Spule als weiteres Bauelement ein. Die für Schaltungen relevante Eigenschaft einer Spule ist ihre (Selbst-) Induktivität L . Sie genügt dem Gesetz

$$U = L \cdot \dot{I}. \quad (3.37)$$

Die Einheit der Induktivität ist $[L] = \text{H}$ (Henry). $\text{H} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{A}^2$. Das Symbol L ist dem deutschen Physiker Lenz und die Einheit dem amerikanischen Physiker Henry geschuldet, die maßgeblich zu unserem heutigen Verständnis vom Magnetismus beigetragen haben.

Eine Spule bzw. Induktivität widersetzt sich gemäß Gleichung (3.37) einer Stromänderung und kann daher in Analogie zu einer Trägheit bzw. Masse gesehen werden, die ihrer Geschwindigkeitsänderung entgegenwirkt. Die Arbeit, die durch Verschiebung einer Ladung dQ an der Ladung verrichtet wird ist demzufolge

$$dW = U dQ. \quad (3.38)$$

Bei konstanter Spannung erhalten wir die Leistung $P = \dot{W}$

$$\dot{W} = U \cdot \frac{dQ}{dt} \quad (3.39)$$

$$= L \cdot \dot{I} \cdot I. \quad (3.40)$$

Somit ist die in einer Spule enthaltenen Energie

$$W = L \int_0^t dt \cdot \dot{I} \cdot I \quad (3.41)$$

$$= \frac{L}{2} \cdot I^2, \quad (3.42)$$

für die Anfangsbedingung $I(t = 0) = 0$. In der oben angesprochenen Analogie entspräche dies der kinetischen Energie eines Massepunkts. Der mikroskopische Ursprung der Energie ist allerdings die magnetische Feldenergie, ähnlich wie die elektrostatische Feldenergie eines Kondensators den Ausdruck $W = C \cdot Q^2/2$ bedingt.

Die Beschreibung eines RL-Serienkreises,

$$L \cdot \dot{I} + R \cdot I = U(t). \quad (3.43)$$

ist mathematisch isomorph zu dem eines RC-Serienkreises, weil beide eine DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten darstellen.¹ Alle Lösungen für den RC-Kreis können somit nach Umbenennung der Variablen auf den RL-Kreis übertragen werden. Insbesondere finden wir bei einer periodischen Anregung mit $U(t) = U_0 \exp(i\omega t)$ die Impedanz einer Spule

$$Z_L = i\omega L, \quad (3.44)$$

die mit der Frequenz anwächst und nicht wie beim Kondensator mit ihr abfällt. Als Relaxationszeit eines RL-Kreises findet man

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (3.45)$$

¹Wir hätten die DGL auch als DGL 2. Ordnung darstellen können: $L\ddot{Q} + R\dot{Q} = U(t)$. Der Ansatz $Q(t) \propto Q_0 \exp(\lambda \cdot t)$ führt zu zwei Lösungen mit $\lambda = -R/L$ und $\lambda = 0$. Letztere, die zu $Q(t) = \text{const}$ führt, ist in einem reinen RL Kreis ohne Bedeutung.

3.4 RLC-Kreise

Die drei Einzelelemente R , L und C können auf verschiedene Arten verschaltet werden, sodass der resultierende Schaltkreis eine Funktion erfüllt, z.B. einen Frequenzfilter. Zur mathematischen Beschreibung eines solchen Kreises gehen wir wie in den vorherigen Kapiteln vor. Dies soll im Folgenden an einigen Beispielen illustriert werden.

3.4.1 RLC-Serienkreis

Zunächst betrachten wir einen RLC-Serienkreis:

$$L \cdot \ddot{Q} + R \cdot \dot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = U(t). \quad (3.46)$$

Die homogene DGL kann wieder durch den Ansatz

$$Q(t) = Q_\omega \cdot e^{i\omega t} \quad (3.47)$$

gelöst werden, wobei wir im Vergleich zu unseren vorherigen Ansätzen den Eigenwert λ durch $i\omega$ ersetzt haben, weil DGLs zweiter Ordnung oft Schwingungen als Lösung haben. Der Ansatz führt zu der Eigenwertgleichung

$$\left(-\omega^2 \cdot L + i \cdot \omega \cdot R + \frac{1}{C} \right) \cdot Q_\omega = 0, \quad (3.48)$$

deren Lösungen

$$\omega = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{L} \pm \Omega \quad (3.49)$$

sind, wobei

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (3.50)$$

Um die folgende Diskussion zu vereinfachen, verwenden wir die Ausdrücke $\tau = R/L$ – wie in Gleichung (3.45) eingeführt – sowie

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (3.51)$$

das die Eigenfrequenz eines nicht-dissipativen LC Kreises beschreibt und somit einen ungedämpften Oszillator darstellt. Mit den neuen Variablen sind die (komplexen) Eigenfrequenzen

$$\omega_\pm = \frac{i}{2 \cdot \tau} \pm \Omega, \quad (3.52)$$

wobei

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4 \cdot \tau^2}}. \quad (3.53)$$

Die Natur der Lösungen hängt nun davon ab, ob Ω eine reelle Zahl ist (gedämpfte Schwingung), $\Omega = 0$ (aperiodischer Grenzfall) oder aber Ω eine rein imaginäre Zahl ist (Kriechfall). Diese Fälle sollen separat angesprochen werden.

Kriechfall

Wir betrachten zunächst den Kriechfall (Ω ist rein imaginär), weil wir dann mit rein reellen Funktionen rechnen können. So lernen Sie, wie man ein Anfangswertproblem (AWP) löst, ohne gleichzeitig mit den vielleicht noch ungewohnten komplexen Zahlen hantieren zu müssen. Im Kriechfall sind unsere beiden “Frequenzen” rein imaginär, sie entsprechen also zwei exponentiellen Funktionen.

$$Q_{1,2}(t) \propto e^{-\nu_{1,2} \cdot t} \quad (3.54)$$

mit den (Relaxations-) *Raten*

$$\nu_{1,2} = \frac{1}{2\tau} \pm |\Omega|. \quad (3.55)$$

Da $|\Omega| < 1/2\tau$, sind $\nu_{1,2}$ beide positiv und damit die Lösungen mit der Zeit abklingend.

Wir wollen nun das AWP $Q(t=0) = Q_0$ und $\dot{Q}(t=0) = 0$ lösen. Die allgemeine Lösung lautet

$$Q(t) = A \cdot e^{-\nu_1 t} + B \cdot e^{-\nu_2 t}, \quad (3.56)$$

weshalb

$$\dot{Q}(t) = -\nu_1 \cdot A \cdot \exp(-\nu_1 t) - \nu_2 \cdot B \cdot \exp(-\nu_2 t). \quad (3.57)$$

Somit ist die Anfangsbedingung

$$A + B = Q_0 \quad (3.58)$$

$$\nu_1 \cdot A + \nu_2 \cdot B = 0. \quad (3.59)$$

Nach A und B aufgelöst:

$$A = \frac{\nu_2}{\nu_2 - \nu_1} Q_0 \quad (3.60)$$

$$B = \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} Q_0. \quad (3.61)$$

Eingesetzt in Gleichung (3.56):

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = \frac{\nu_2}{\nu_2 - \nu_1} \exp(-\nu_1 t) - \frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1} \exp(-\nu_2 t). \quad (3.62)$$

An dieser Stelle ist es eine hervorragende Idee, den Grenzfall $t \rightarrow 0$ zu betrachten und zwar im Sinne einer Reihenentwicklung der Lösung nach t . Das Ergebnis lautet $Q(t \rightarrow 0)/Q_0 = 1 + 0 \cdot t + O(t^2)$, was unserer gewünschten Anfangsbedingung genau genügt.

Für die gegebene Anfangsbedingung kann Gleichung (3.62) man relativ leicht ansehen, dass $\dot{Q}(t)$ zu keiner Zeit positiv ist, weil sowohl der zur ν_1 zeit-abhängige Faktor als auch der dazugehörige Vorfaktor kleiner ist als die entsprechenden zu ν_2 gehörenden Terme. Es gibt demzufolge keinen Überschwinger in $Q(t)$, weshalb man den Zeitverlauf der Variablen $Q(t)$ auch als *überdämpfte Schwingung* bezeichnet.

Gedämpfte Schwingung

Ist Ω reell, wird die homogene Lösung der DGL durch die beiden Funktionen

$$Q_{\pm}(t) \propto e^{-t/2\tau \pm i\Omega t} \quad (3.63)$$

aufgespannt, die jeweils das Produkt aus einer exponentiell abklingenden und einer schwingenden Funktion sind. Die Sachlage ist somit ähnlich wie im Kriechfall, allerdings mit dem feinen Unterschied, dass die Frequenzen jetzt komplex und nicht rein imaginär sind.

Wir könnten die Lösung im Falle gedämpfter Schwingungen auch mit Hilfe zweier rein reeller Funktionen aufspannen, indem wir die Basisfunktionen $\exp(\pm i\Omega t)$ durch die Funktionen $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ ersetzen. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist dann

$$Q(t) = A \cdot e^{-t/2\tau} \cdot \cos \Omega t + B \cdot e^{-t/2\tau} \cdot \sin \Omega t. \quad (3.64)$$

Die Konstanten A und B werden durch die Anfangsbedingung festgelegt. Dabei bedingt die Vorgabe von $Q(t_0) = Q_0$ sowie $\dot{Q}(t_0) = I_0$ die Festlegung zweier Koeffizienten in der Lösung, also A und B , wenn wir die reelle Basis zur Rechnung verwenden.

Als Beispiel betrachten wir wieder $Q(t=0) = Q_0$ und $\dot{Q}(t=0) = 0$. Wir wählen jedoch nicht die reelle sondern die komplexe Basis und schreiben die allgemeine Lösung gemäß

$$Q(t) = a \cdot e^{i\omega_+ t} + a^* \cdot e^{i\omega_- t}, \quad (3.65)$$

sodass

$$\dot{Q}(t) = i\omega_+ \cdot a \cdot e^{i\omega_+ t} + i\omega_- \cdot a^* \cdot e^{i\omega_- t}. \quad (3.66a)$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass $Q(t)$ eine reelle Zahl ist und dass $\exp(i\omega_- t)$ komplex konjugiert zu $\exp(i\omega_+ t)$ ist. Die Vorgabe einer Anfangsbedingung mit zwei Werten bedingt auch hier – ganz analog zur Vorgehensweise im Kriechfall – die Festlegung zweier Zahlen, nämlich des Real- und des Imaginärteils von a . Um $Q(t=0) = Q_0$ zu erfüllen, muss

$$Q_0 = a + a^* \quad (3.67)$$

$$= 2 \cdot a', \quad (3.68)$$

wobei a' der Realteil von a darstellt und a'' den Imaginärteil. Für a' gilt demzufolge

$$a' = Q_0/2.$$

Die zweite Bedingung lautet $\dot{Q}(t=0) = 0$ bzw.

$$0 = i\omega_+ a + i\omega_- a^* \quad (3.69a)$$

$$(\text{definitiv üben!} \rightarrow) = \left(\frac{-1}{2 \cdot \tau} + i\Omega \right) \cdot (a' + ia'') + \left(\frac{-1}{2 \cdot \tau} - i\Omega \right) \cdot (a' - ia'') \quad (3.69b)$$

$$(\text{definitiv üben!} \rightarrow) = \left(\frac{a'}{\tau} - 2 \cdot \Omega \cdot a'' \right) \cdot i, \quad (3.69c)$$

sodass

$$a'' = a' / (2 \cdot \Omega \cdot \tau).$$

Die Lösung zu unserem AWP ergibt somit

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\Omega \cdot \tau \right) \cdot e^{i\omega_+ t} + \text{c.c.} \quad (3.70a)$$

$$= Q_0 \cdot e^{-t/2\tau} \left(\cos \Omega t + \frac{\sin \Omega t}{2\Omega\tau} \right), \quad (3.70b)$$

wobei c.c. für complex conjugate bzw. sein lateinisches Pendant steht, das man im deutschen komplex konjugiert nennen darf. An dieser Stelle ist es wieder eine hervorragende Übung, den

Grenzfall $t \rightarrow 0$ mit Hilfe einer Reihenentwicklung zu betrachten, um sicherzustellen, dass die Anfangsbedingung in der Tat korrekt wiedergegeben wird.

Wenn Sie mich jetzt fragen würden, warum wir nicht die Lösung (3.62) mit komplexen Raten $\nu_{1,2}$ recycelt haben, wäre meine ehrliche Antwort: Ich wollte Sie ein klein wenig mit komplexen Zahlen ärgern.

Der aperiodische Grenzfall

Im aperiodischen Grenzfall ($\Omega = 0$) liegt in der DGL eine doppelte Nullstelle vor. Somit haben wir die beiden Lösungsfunktionen

$$Q_1(t) \propto e^{-\nu \cdot t} \quad (3.71)$$

$$Q_2(t) \propto t \cdot e^{-\nu \cdot t}, \quad (3.72)$$

mit $\nu = 1/2\tau$. Dadurch kann im aperiodischen Grenzfall die allgemeine Lösung der DGL wie folgt geschrieben werden:

$$Q(t) = A \cdot e^{-\nu \cdot t} + B \cdot t \cdot e^{-\nu \cdot t} \quad (3.73)$$

$$\dot{Q}(t) = (-A \cdot \nu - B \cdot t \cdot \nu + B) \cdot e^{-\nu \cdot t}. \quad (3.74)$$

Somit ergibt sich für die Anfangsbedingung $Q(0) = Q_0$, $\dot{Q}(0) = 0$ das Gleichungssystem

$$Q_0 = A \quad (3.75)$$

$$0 = -A\nu + B, \quad (3.76)$$

sodass die Lösung

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = (1 + \nu \cdot t) \cdot e^{-\nu \cdot t} \quad (3.77)$$

ist.

Der Q -Faktor

Um die Lösungen eines linearen RLC Kreises oder allgemein eines Oszillators zu charakterisieren, führt man den sogenannten Q -Faktor ein. Er setzt die Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingers, siehe z.B. ω_0 in Gleichung (3.51), in Relation zur Dämpfung bzw. zur "Relaxationszeit" τ , siehe Gleichung (3.45):

$$Q = \frac{\tau \cdot \omega_0}{2}. \quad (3.78)$$

Q ist eine einheitenlose Zahl. Im Falle unseres RLC -Serienkreises ist sie

$$Q = \frac{1}{2R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.79)$$

Wenn der Q -Faktor groß ist, schwingt ein unterdämpfter Oszillator oder Schwingkreis viele Male hin und her, bevor die Schwingung abebbt. Für kleine Q -Faktoren gilt das Gegenteil. Der aperiodische Grenzfall ist $Q_a = 1$. Für $Q \leq Q_a$ schwingt der gute Schwingkreis gar nicht mehr. Der Q -Faktor ist auch als Gütefaktor, Kreisgüte oder Resonanzschärfe bekannt. Der Name leitet sich aus dem Englischen Wort *quality factor* ab.

Die Bedeutung des Q -Faktors im Sinne der Resonanzschärfe wird erst im Fall periodisch getriebener Schwingkreise richtig klar. Hier verwenden wir den Q -Faktor zunächst, um die in diesem Kapitel erzielten Lösungen des gegebenen AWP's in Abbildung 3.2 graphisch darzustellen. Wir erkennen, dass die Periode – also die Abstände zweier Maxima – der leicht unterdämpften Schwingung $\tau\omega_0 = 4$ bereits recht nahe bei 2π liegt. Im aperiodischen Grenzfall relaxiert die Ladung recht schnell gegen null. Im leicht überdämpften Fall, $\tau\omega_0 = 4$ ist die Relaxation bereits sehr langsam. Aber auch ein unterdämpften Fall, $\tau\omega_0 = 1/8$ relaxiert der Schwingkreis nicht schnell sondern oszilliert um die Gleichgewichtslage.

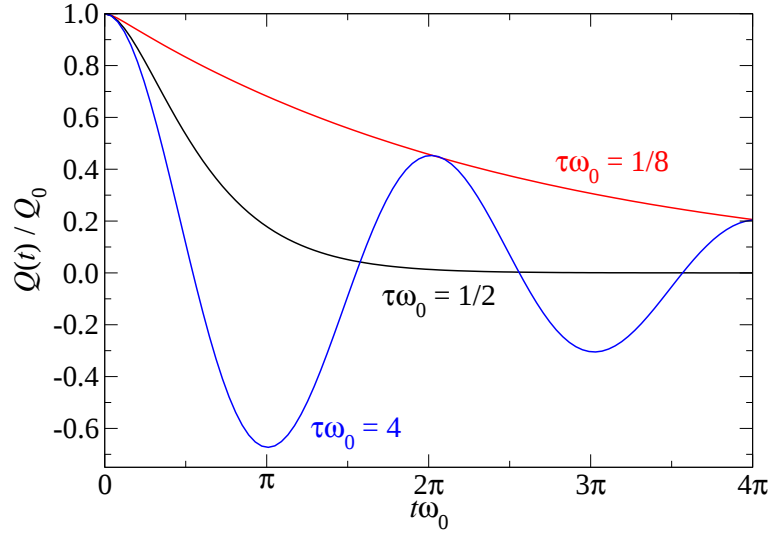


Abb. 3.2: Darstellung der Lösung des AWP $Q(0) = Q_0, I(0) = 0$ für einen RLC -Serienkreis mit verschiedene Q -faktoren, definiert als $\tau\omega_0$. Eine große Dämpfungszeit τ – verglichen mit $1/\omega_0$ – bedeutet eine kleine Dämpfung und umgekehrt.

Der periodisch getriebene RLC -Serienkreis

Als nächstes untersuchen wir den RLC -Serienkreis unter einer periodischen Spannung $U(t) = U_\omega \cos \omega t = \mathcal{R}\{U_\omega \exp(i\omega t)\}$. Dabei setzen wir als Lösung wieder $Q(t) = Q_\omega \exp(i\omega t)$ an und erhalten ganz zwanglos

$$\left(-\omega^2 \cdot L + i \cdot \omega \cdot R + \frac{1}{C}\right) \cdot Q_\omega = U_\omega. \quad (3.80)$$

Somit erhalten wir für die (reelle) Ladung

$$Q(t) = \mathcal{R} \left\{ \frac{U_\omega e^{i\omega t}}{1/C - \omega^2 \cdot L + i \cdot \omega \cdot R} \right\}. \quad (3.81)$$

Falls Ihnen hier einige Zwischenschritte fehlen, würde ich Sie gerne in den Kapitel 3.2 zurück schicken. Dort stehen sie alle drin, nur eben ohne die Impedanz der Spule.

Gleichung (3.81) teilen wir im Nenner und Zähler durch L , ersetzen dann den Ausdruck $1/LC$ mit ω_0^2 und den Ausdruck R/L mit der Rate ν , die die Dämpfung in Einheiten einer Frequenz angibt – und somit das Inverse der Relaxationszeit τ ist. Für einen reellen Vorfaktor U_ω ergibt sich somit

$$Q(t) = \frac{U_\omega}{L} \cdot \mathcal{R} \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\nu} \right\} \quad (3.82)$$

Die Lösung sieht relativ einfach aus, sie hat es aber in sich. Wir könnten den Ausdruck in der geschweiften Klammer wie folgt umformen

$$\frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\nu} \rightarrow \frac{e^{i(\omega t + \varphi)}}{|\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\nu|} \quad (3.83)$$

mit

$$\tan \varphi = \frac{\omega\nu}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (3.84)$$

oder aber sofort den Realteil auf der rechten Seite der Gleichung (3.82) zu

$$Q(t) = \frac{U_\omega}{L} \cdot \left\{ \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} + \frac{\omega\nu \cdot \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} \right\} \quad (3.85)$$

bestimmen. Im letzten Schritt haben wir angenommen, dass wir $U_\omega e^{i\omega t}$ mit $U_\omega \cos \omega t$ ersetzt haben, sodass wir uns in der Lösung für $Q(t)$ auf den Realteil beschränken durften.

Die Ausdrücke sehen zum Teil recht kompliziert ist. Dennoch tauchen sie immer wieder in dieser oder ähnlicher Form auf und zwar nicht nur bei *RLC* Kreisen und harmonischen Oszi-
alltoren sondern auch bei der mechanischen Anregung elastischer und viskoelastischer Medien. Deshalb lohnt es sich, die Bedeutung der Gleichungen etwas genauer zu studieren, was wir im Folgenden auch tun werden. Zunächst schauen wir uns drei verschiedene Grenzfälle an.

Der quasistatische Grenzfall: $\omega \rightarrow 0$. Für unendlich kleine Frequenzen wird die Impedanz des Kondensators unendlich. Demzufolge fällt die gesamte Spannung am Kondensator ab, sodass $Q(t) = C \cdot U_\omega \cos \omega t$. Dies kann man gut aus der $\omega \rightarrow 0$ -Analyse der Gleichungen erkennen, insbesondere unter Verwendung der Gleichung $\omega_0^2 = 1/L \cdot C$. Oder eben bereits aus Gleichung (3.80), der man ansehen kann, dass die inversen frequenzabhängigen Kapazitäten eines Widerstandes und einer Spule bei $\omega \rightarrow 0$ verschwinden.

Anregung mit der Eigenfrequenz: $\omega = \omega_0$. Bei dieser Frequenz heben sich die Impedanzen bzw. die frequenzabhängigen Kapazitäten der Spule und des Kondensators genau auf. Die Spannung liegt somit komplett am Widerstand an. Wir erhalten damit das Ohmsche Gesetz, was man ebenfalls der Ableitung von $Q(t)$ bezüglich der Zeit bei entsprechender Substitution von ν erkennen kann.

Der hochfrequente Grenzfall: $\omega \rightarrow \infty$. Nun divergiert die Impedanz der Spule, sodass sämtliche Spannung an ihr abfällt. Wieder kann man sich durch Grenzwertbetrachtung der eben hergeleiteten Gleichung – oder durch Inspektion der Gleichung (3.80) – davon überzeugen, dass die Spannung bei hohen Frequenzen in der Tat an der Spule abfällt.

Um auch die Frequenzen zwischen den diskutierten Fällen zu visualisieren, stellen wir die Funktionen

$$A(\omega) = \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\nu|} \quad (3.86)$$

$$A_c(\omega) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} \quad (3.87)$$

$$A_s(\omega) = \frac{\omega\nu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2}, \quad (3.88)$$

also bis auf den Vorfaktor U_ω/L die “Antwort” des Schwingers auf die Anregung, in Abbildung 3.3 dar. Man erkennt, dass die Amplitude der Schwingung in der Tat für die Frequenz am größten ist, bei der sich die Impedanz der Spule und des Kondensators gegenseitig aufheben.

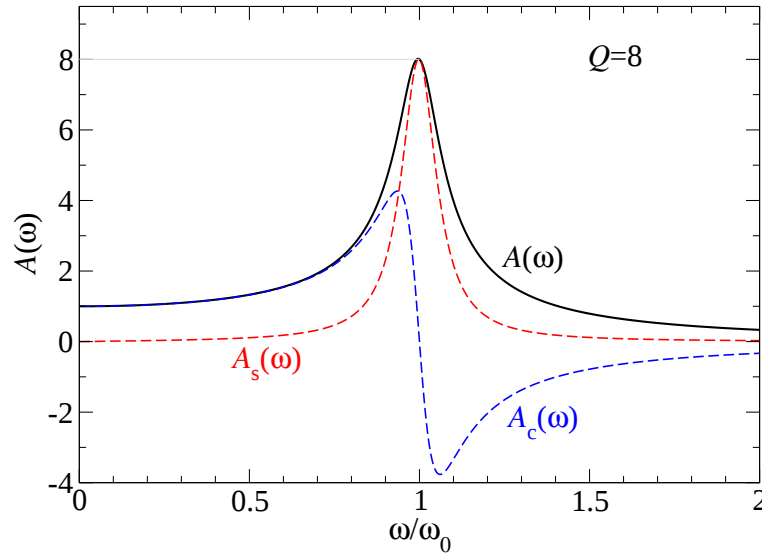


Abb. 3.3: Antwortfunktion eines Schwingkreises mit einem Q -Faktor $Q = 8$. Betrag, $A(\omega)$, Realteil $A_c(\omega)$ und Imaginärteil $A_s(\omega)$ sind separat dargestellt.

Wird ein RLC -Serienkreis mit einer zeitabhängigen Spannung betrieben, die sich als Überlagerung verschiedener Frequenzen darstellen lässt, so erzeugen bei hohem Q -Faktor nur die Beiträge einen nicht zu vernachlässigende Antwort, deren Frequenzen innerhalb des Peaks von A_s liegen. Man spricht auch von Resonanz, wenn ein System bei einer Anregungsfrequenz – sehr stark mitschwingt. Der Peak selbst hat eine relative Breite von $\Delta\omega = \omega_0/Q$. Frequenzen innerhalb des Bereichs $\omega_0 \cdot (1 \pm 1/2Q)$ führen somit zu starken Schwingungen. Aus diesem Grund wird der Q -Faktor auch Resonanzschärfe genannt.

Während $|A(\omega)|$ proportional zum Betrag der Schwingung ist, gibt φ in Gleichung (3.84) die Phasenverschiebung an. Bei sehr niederfrequenten Schwingung folgt die Ladung der Spannung quasi ohne Verzögerung. Die relative Phase zwischen Spannung und Ladung ist dann sehr klein. Mit zunehmender Frequenz eilt die Kurve für $Q(t)$ der von $U(t)$ um eine Phasenverschiebung φ vor. Bei der Resonanzfrequenz ω_0 ist die Phasenverschiebung gleich $\pi/2$. Schließlich sind bei sehr großen ω Spannung und Ladung gegenläufig.

In der Elektrotechnik interessiert man sich öfter für die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom statt für die zwischen Spannung und Ladung. Von unseren Ergebnissen müssten wir dann jeweils die Phasenverschiebung von $\pi/2$ abziehen. Sprich, an einer rein ohmschen Impedanz gibt es keine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. An einem Kondensator eilt der Strom der Spannung um $\pi/2$ voraus, an einer Spule ist er um die Phase $\pi/2$ verzögert.

Was aber ist die genaue Bedeutung des Realteils der Antwort, also A_c und die des (negativen) Imaginärteils A_s ?

Ohmsche Verluste in RLC -Schwingkreisen

Die instantane Leistung, also die Energie pro Zeiteinheit, die in einen Schaltkreis fließt, ist wie in Abschnitt 3.3 hergeleitet, $P(t) = U(t) \cdot I(t)$. Im Mittel ergibt sich also eine Verlustleistung von

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \cdot U(t) \cdot I(t), \quad (3.89)$$

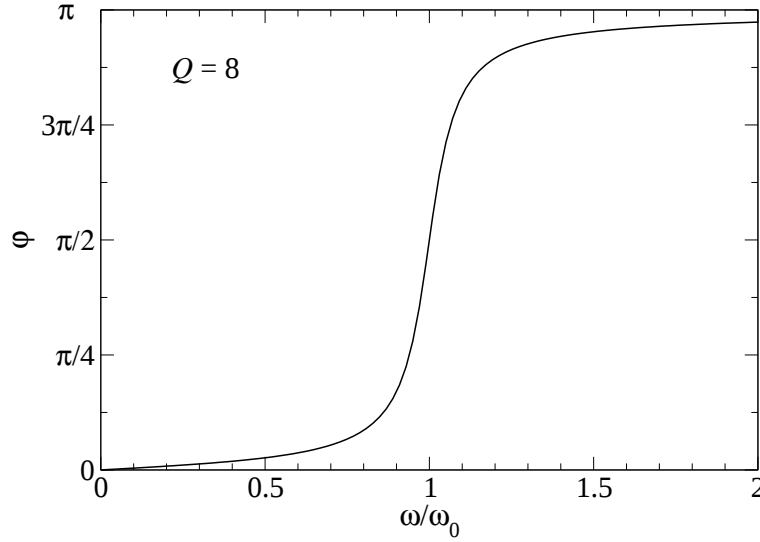


Abb. 3.4: Phasenverschiebung zwischen Ladung und Spannung im RLC Serienkreis mit dem Q -Faktor $Q = 8$.

wobei T die Zeit ist, über die wir die Leistung mitteln. Wir können T jetzt entweder sehr groß werden lassen, oder aber einfach mit der Zeitdauer einer Periode $T = 2\pi/|\omega|$ gleichsetzen. In einem periodisch oszillierenden Schwingkreis ist zu Beginn der Periode ebenso viel Energie in Kondensator und Spule wie an deren Ende. Alle (netto) hereingesteckte Energie muss demzufolge im Widerstand in Wärme umgewandelt sein.

Den Strom erhalten wir durch Ableiten von $Q(t)$ nach der Zeit, sodass $I(t) \propto \sin \omega t$. Weil das Integral über das Produkt $\cos \omega t \cdot \sin \omega t$ verschwindet, wenn der Integrationsbereich ein ganzzahlig Vielfaches der halben Periode ist, liefert der in $I(t)$ zu $\cos \omega t$ proportionale Term, bzw. der in $Q(t)$ zu $\sin \omega t$ proportional Term keinen Beitrag. Im Gegenzug kann man einen Integranden $\sin^2 \omega t$ bei der Integration über ein ganzzahlig Vielfaches der halben Periode mit $1/2$ ersetzen. Damit wird die über eine Periode integrierte Leistung $U(t) \cdot I(t)$ zu

$$P = \frac{|\omega|}{2\pi} \int_0^{2\pi/|\omega|} dt \frac{\omega U_\omega^2}{L} \cdot A_s(\omega) \cdot \sin^2(\omega t) \quad (3.90a)$$

$$= \frac{U_\omega^2}{2L} \cdot \omega \cdot A_s(\omega) \quad (3.90b)$$

Dieser Ausdruck ist nie negativ, weil die asymmetrische Funktion $A(\omega)$ für positive Werte immer positiv ist.

Die Funktion $A_s(\omega)$ ist also proportional zu den ohmschen Verlusten, die ein Schwingkreis im Mittel über eine oder viele Perioden erleidet. Die in der Mechanik analoge Größe hieße daher auch Verlustmodul. Im Gegensatz dazu beschreibt der Ausdruck $A_c(\omega)$ wie stark die potenzielle Energie im Mittel während einer oder vieler Perioden schwankt. Ein positives Vorzeichen bedeutet, dass die Energie vorwiegend im Kondensator gespeichert ist, bei einem negativen Vorzeichen von A_c ist im Mittel die in der Spule gespeicherte potenzielle Energie größer. Die in der Mechanik zu A_c analoge Größe heißt demzufolge Speicherm modul.

Impedanz und Scheinwiderstand

Die Impedanz bezeichnet das Verhältnis der Amplituden des Stromes und der Spannung. Weil $I_\omega = i\omega Q_\omega$ ergibt sie sich mit Gleichung (3.80) für den RLC Serienkreis zu

$$Z = i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C}. \quad (3.91)$$

Dies zeigt wiederum, dass die Gesamtimpedanz einer Serienschaltung die Summe der Teilimpedanzen ist.

Als Scheinwiderstand wird der Betrag der Impedanz bezeichnet. Er gibt das Verhältnis der Amplituden von Spannung und Strom an. Der Scheinwiderstand alleine sagt jedoch nichts über die ohmschen Verluste eines periodisch getriebenen RLC-Kreises aus.

3.4.2 Weitere RLC Schaltkreise: Passive Frequenzfilter

Es bestehen viele weitere Möglichkeiten neben dem RLC -Serienkreis, die elektrischen Bauelemente R , L und C miteinander zu verschalten. Zum Glück muss man nicht jedes Mal die zugrunde liegende DGL aufstellen oder lösen, um das Verhalten des Schaltkreises zu charakterisieren. Es genügt, die jeweiligen Impedanzen der Bauteile gemäß der diversen Regeln – im allgemeinsten Fall die von Kirchhoff – zu verwenden. Dabei muss man sich beim Rechnen mit Impedanzen darüber im Klaren sein, dass der implizit verwendete Ansatz

$$Z(\omega) \cdot I_\omega e^{i\omega t} = U_\omega e^{i\omega t} \quad (3.92)$$

ist, wohingegen unsere Beschreibung des RLC -Serienkreises eher auf frequenzabhängigen Kapazitäten aufgebaut war.

Parallele RLC-Kreis

Im parallelen RLC Kreis sind, wie sein Name es vermuten lässt, Widerstand, Spule und Kondensator parallel geschaltet. Somit ergibt sich die Impedanz zu

$$Z^{-1}(\omega) = \frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L} \quad (3.93)$$

$$= \frac{i\omega L - \omega^2 LCR + R}{i\omega LR}. \quad (3.94)$$

Wenn wir wie zuvor $\omega_0 = 1/LC$ und $\tau = L/R$ definieren, ergibt sich die Impedanz zu

$$Z(\omega) = R \cdot \frac{i\omega L}{i\omega L + R \cdot (1 - \omega^2/\omega_0^2)} \quad (3.95)$$

$$= R \cdot \frac{\omega\tau}{\omega\tau - i \cdot (1 - \omega^2/\omega_0^2)} \quad (3.96)$$

Die Impedanz ist vom Betrag her also kleiner gleich R . Dieses Mal ist somit die Impedanz für $\omega = \omega_0$ am größten, die Amplitude der Schwingung, also der Gesamtstrom, an der Resonanzfrequenz aber am kleinsten. Ein zwischen der Spannungsquelle und dem RLC Parallelkreis angeschlossene Ampèremeter würde bei der Resonanzfrequenz einen Ausschlag nach unten anzeigen. Die entsprechende Frequenz ist blockiert.

Passive Frequenzfilter

Die Funktion eines Frequenzfilters ist es, bevorzugte Frequenzen aus einem eingehenden Signal heraus zu filtern. Wenn wir in den bisher in diesem Kapitel untersuchten Schaltungen den Widerstand als Verbraucher interpretieren, würde der *RLC*-Serienkreis einen *Bandpassfilter* darstellen, der bevorzugt Frequenzen in der Nähe von $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ durchlässt. Dahingegen blendet der *RLC*-Parallelkreis diese Frequenzen aus, weshalb er als *Bandstoppfilter* wirkt.

Weitere Filter sind *Tiefpass*- und *Hochpassfilter*, die Signale bis zu einer gewissen Frequenz nahezu verlustfrei durchlassen, die unerwünschten Frequenzen hingegen stark abschwächen. Ein Hochpassfilter lässt vor allem hochfrequente Schwingungen passieren, ein Tiefpassfilter hingegen Schwingungen mit tiefen Frequenzen. Das einfachste, allgemeine Prinzip eines (passiven) Frequenzfilters ist in Abbildung 3.5 dargestellt. So kann neben dem eben besprochenen Bandstoppfilter ein Hochpassfilter z.B. dadurch realisiert werden, dass Z_1 durch einen Kondensator und Z_2 durch einen Widerstand ersetzt wird.

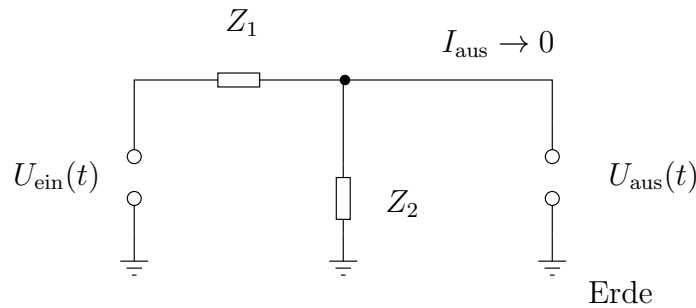


Abb. 3.5: Grundprinzip eines einfachen Frequenzfilters.

Betrachten wir eine rein oszillatorische Eingangsspannung: $U_{\text{ein}} \propto \exp(i\omega t)$. Nun gehen wir davon aus, dass U_{aus} “stromfrei” gemessen und dann weiter verstärkt wird. Welche Spannung U_{aus} liegt am Ausgang an?

$$U_{\text{ein}}(t) = (Z_1 + Z_2) \cdot I \quad (3.97)$$

$$U_{\text{aus}}(t) = Z_2 \cdot I \quad (3.98)$$

$$\Rightarrow \frac{U_{\text{aus}}(t)}{U_{\text{ein}}(t)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (3.99)$$

Um einen Tiefpass zu realisieren, muss $|Z_2|$ bei tiefen Frequenzen groß sein verglichen mit $|Z_1|$. Bei hohen Frequenzen sollte $|Z_2|$ aber klein sein. Dies wird erreicht, indem Z_2 als Kondensator und Z_1 als gewöhnlicher Widerstand gewählt wird. Dann ergibt sich das Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangsspannung nämlich wie folgt:

$$\frac{U_{\text{aus}}(t)}{U_{\text{ein}}(t)} = \frac{1/i\omega C}{R + 1/i\omega C} \quad (3.100)$$

$$= \frac{1}{1 + i\omega \cdot \tau} \quad (3.101)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}} \cdot e^{i\varphi} \quad (3.102)$$

mit $\tau = C \cdot R$ und $\tan \varphi = -\omega \cdot \tau$.

Um einen einfachen Hochpass zu realisieren, kann man entweder den Kondensator im Tiefpass durch eine Spule ersetzen oder die Elemente Z_1 und Z_2 werden bzgl. ihrer Anordnung im Tiefpass miteinander vertauscht.

4 Magnetostatik

4.1 Ursachen des Magnetfeldes

Ladungen erzeugen nicht nur elektrische sondern auch magnetische Felder, vorausgesetzt die Ladungen bewegen sich. Als Symbol für das Magnetfeld, das ein Vektorfeld ist, wird der Buchstabe $\mathbf{B}$ verwendet. Prinzipiell kann seine Größe durch die Messung der Kraft, die es auf einen Magneten oder einen stromdurchflossenen Leiter ausübt, bestimmt werden. Die Einheit des magnetischen Feldes ist das Tesla, benannt nach dem serbisch-kroatischen Physiker bzw. Ingenieur Nikola Tesla. Das Tesla ist keine S.I. Grundeinheit: $[\mathbf{B}] = \text{T} = 1 \text{ Vs/m}^2 = \text{kg/As}^2$.

Das magnetische Pendant zu dem Coulomb'schen Gesetz der Elektrostatik lautet

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.1)$$

Hierbei ist μ_0 die *magnetische Feldkonstante* oder *Permeabilität des Vakuums*. Ihr Wert beträgt per Definition $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$. Außerdem ist q die Ladung des Teilchens, welches sich mit der (konstanten) Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ *relativ* zum Beobachter bewegt. Es spielt hierbei, wie bei physikalischen Grundgesetzen üblich, keine Rolle, ob sich die Ladung im Raum bewegt und das Messgerät (z.B. Kompassnadel) im Labor fixiert ist — oder umgekehrt. Der Vektor $\mathbf{r}$ ist der Vektor, der von der Ladung zu der Koordinate zeigt, an der das magnetische Feld bestimmt wird. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ ist indes die Geschwindigkeit der Ladung relativ zum Beobachter. Die Richtung des magnetischen Feldes lässt sich über die Rechte-Hand-Regel bestimmen. Zeigt der Daumen in die Richtung der Geschwindigkeit einer positiven Ladung, der abgepreizte Zeigefinger von der Ladung zum Beobachter, dann zeigt der abgespreizte Mittelfinger parallel zum magnetischen Feld an der Stelle des Beobachters.

Zunächst ein paar Bemerkungen zu Gleichung (4.1). Erstens, obwohl Gleichung (4.1) sehr fundamental und in gewissem Maße das magnetische Pendant zum Coulomb'schen Gesetz ist, hat sie keinen eigenen Namen. Das liegt daran, dass die Gesetze für Magnetfelder historisch nicht über bewegte, isolierte Ladungen entschlüsselt wurden, sondern durch die Beobachtung von stromdurchflossenen Leitern. Zweitens ist das magnetische Feld, im Gegensatz zum elektrischen Feld, nicht radial. Im Gegenteil, es steht senkrecht sowohl zum Relativvektor zwischen bewegter Ladung und dem Ort, an dem das Magnetfeld bestimmt wird, als auch zur Geschwindigkeit der Ladung. Drittens fällt das magnetische Feld, diesmal wie das elektrische Feld auch, proportional zu $1/r^2$ ab. Viertens ergibt der Ausdruck $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ genau die Lichtgeschwindigkeit c . Dieser Sachverhalt lässt darauf schließen, dass Elektrizität und Magnetismus eine Einheit bilden. Einstein gelang es, den fundamentalen Zusammenhang zwischen den beiden Feldern mithilfe der Relativitätstheorie herzustellen. Dazu gab er die Idee eines absoluten Raums und einer absoluten Zeit auf und ersetzte sie durch eine vierdimensionale Raumzeit. Seine wesentliche Forderung bestand in dem – mittlerweile experimentell häufig überprüften – Postulat, dass die Lichtgeschwindigkeit in jedem Bezugssystem denselben Wert $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ annimmt.

Es bestehen also einige Ähnlichkeiten zwischen dem Coulomb'schen Gesetz und Gleichung 4.1 aber auch gravierende Unterschiede. Formal betrachtet besteht der einzige Unterschied darin,

dass die Konstante $1/\varepsilon_0$ im Coulomb'schen Gesetz durch $\mu_0 \mathbf{v} \times$ in Gleichung 4.1 ersetzt wird. Dieser Unterschied erleichtert es uns natürlich nicht, die Magnetfelder durch Aufsummation des Effektes bewegter Ladungen oder Ströme bzw. Integration über Stromdichten zu bestimmen.

Final sei in der Einführung zur Magnetostatik noch angemerkt, dass die in diesem Kapitel verwendeten Gleichung nur dann gelten, wenn die Geschwindigkeiten der bewegten Ladungen klein gegenüber c sind und die Geschwindigkeiten der Ladungen bzw. die Ströme zeitlich konstant.

4.1.1 Das Biot-Savart'sche Gesetz

Bewegt sich eine Ladung q mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, so legt sie eine Strecke $d\mathbf{l}$ in der Zeiteinheit dt zurück. Ist die Ladung nun auf einen Leiter beschränkt, der an einem gegebenen Ort ein Segment der Länge $d\mathbf{l}$ hat, dann entspricht der Ausdruck $q\mathbf{v}$ durch die Ersetzung

$$q\mathbf{v} = q \frac{d\mathbf{l}}{dt} \rightarrow I d\mathbf{l} \quad (4.2)$$

dem Strom mal dem Vektor, der Länge und Richtung eines Leitersegmentes $d\mathbf{l}$ hat. Einsetzen dieser Substitution (die es sich zu merken lohnt, da sie immer wieder gebraucht wird) in Gleichung 4.1 liefert dann den Beitrag des stromführenden Segmentes zum Gesamtmagnetfeld:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.3)$$

Diese Gleichung entspricht dem Biot-Savart'schen Gesetz. In der Regel wird es allerdings für eine geschlossene Leiterschleife formuliert:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}'}{r'^3}, \quad (4.4)$$

wobei $\mathbf{r}'$ der Relativvektor zwischen Leitersegment und Beobachter ist. Der Ausdruck $\oint d\mathbf{l} \dots$ steht für ein geschlossenes Wegintegral, das wir gleich an einigen Beispielen einführen.

Das Feld eines unendlich langen, stromdurchflossenen Drahtes

Wir betrachten einen geraden, unendlich langen Draht, der einen konstanten Strom I führt und berechnen das Magnetfeld in einem Abstand r vom Kabel, siehe Abb. 4.1. Um ein geschlossenes Kabel zu realisieren, wird der Stromkreis in Gedanken in "unendlich großer" Entfernung wieder zurück geführt. Weil das Magnetfeld mit $1/r^2$ fällt, fallen die Korrekturen bei nicht wirklich unendlicher Entfernung nicht stark ins Gewicht. (Siehe Diskussion und Abbildung in Vorlesung für mehr Details.)

Die hier vorzunehmende Berechnung des B -Feldes ist der Berechnung des E -Feldes eines homogen geladenen Drahtes recht ähnlich. Diese Rechnung wurde in Abschnitt 1.2 besprochen. Es gibt jedoch einen wesentlichen Unterschied: Die Richtung des Feldes. Aber gehen wir Schritt für Schritt. Um das Linienintegral zu berechnen, setzen wir die Definition für die Vektoren ein:

$$d\mathbf{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ -z \end{pmatrix}; \quad d\mathbf{l} \times \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} r dz; \quad r'^2 = r^2 + z^2.$$

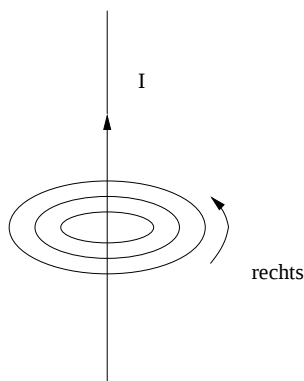


Abb. 4.1: Fließt der Strom parallel zur z -Achse entsteht ein Magnetfeld in der eingezeichneten Richtung. Dieses ist rechtsdrehend, wenn wir die Richtung des Magnetfeldes von unten betrachten. Es spielt dabei keine Rolle, ob der Strom aus positiven Ladungen besteht, die sich in positive z -Richtung bewegen, oder aus negativen Ladungen, die sich in negative z -Richtung bewegen.

Somit ergibt sich

$$\mathbf{B}(r, \varphi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}^3}}_{=2/r} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Weil der Vektor $\mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)^T$ im Integranden nicht von z abhängt, kann er aus dem Integral heraus gezogen werden, sodass das Ergebnis des Integrals aus Gleichung (1.11) wieder verwertet werden kann. Für das magnetische Feld in der unmittelbaren Nähe eines geraden, stromführenden Drahtes ergibt sich also

$$\mathbf{B}(r, \varphi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi. \quad (4.6)$$

Das magnetische Feld auf der Symmetrieachse einer kreisrunden Leiterschleife

Als nächstes betrachten wir eine kreisrunde Leiterschleife. Abbildung siehe Vorlesung. Die Koordinaten des Rings können also mit $\mathbf{l} = r(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T$ angegeben werden und der Standpunkt des Beobachters mit $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z$. Somit gilt

$$d\mathbf{l} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} r d\varphi; \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}; \quad d\mathbf{l} \times \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} z \cos \varphi \\ z \sin \varphi \\ r \end{pmatrix} r d\varphi; \quad r'^2 = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Eingesetzt in Biot-Savart und Integration über einen nun diesmal wirklich geschlossenen Weg ($\int_0^{2\pi} d\varphi \dots$) ergibt

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} z \cos \varphi \\ z \sin \varphi \\ r \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Da die Integrale über $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ verschwinden, kann Gleichung (4.7) schnell zu

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} \mathbf{e}_z \quad (4.8)$$

ausgewertet werden. Auf der Symmetrieachse der Leiterschleife ist das B -Feld also (Überraschung!!) parallel zur Symmetrieachse.

Auf der Symmetrieachse des Rings fällt das B -Feld in großer Entfernung, also für $z \gg r$, mit $1/z^3$ ab. Dies ist dieselbe Abhängigkeit des B -Feldes vom Abstand zu einer Leiterschleife wie die des E -Feldes vom Abstand zu einem Dipols. Dies wiederum legt den (berechtigten) Verdacht nahe, dass eine Leiterschleife im Fernfeld das magnetische Pendant zum elektrischen Dipol darstellt.

4.1.2 Das Ampère'sche Gesetz

In der Elektrostatik konnten die Felder hochsymmetrischer Ladungsverteilungen einfacher über das Gauß'sche Gesetz als über das Coulomb'sche Gesetz berechnet werden. In der Magnetostatik ist dies ähnlich. Das Ampère'sche Gesetz besagt nämlich, dass das geschlossene Wegintegral über das Magnetfeld proportional zum eingeschlossenen Strom ist. In Formeln ausgedrückt:

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 I_C, \quad (4.9)$$

wobei C eine beliebig geschlossene Kurve darstellt und I_C der durch die von der Kurve C umschlossene Fläche tretenden Strom. Ohne Beweis stellen wir fest, dass das Ampère'sche Gesetz und das Gesetz von Biot-Savart mathematisch isomorph sind.

Als erste Anwendung des Ampère'schen Gesetzes betrachten wir den unendlich langen, stromführenden Draht aus dem Kapitel 4.1.1. Aus Symmetriegründen kann das $\mathbf{B}$ -Feld nur parallel zu $\mathbf{e}_\varphi$ sein, also $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(r) \cdot \mathbf{e}_\varphi$. Da $d\mathbf{r} = r \mathbf{e}_\varphi d\varphi$ folgt, dass die linke Seite der Gleichung 4.9 einfach $2\pi r B$ ist. Weil der Integrationsweg nur eine Leiterschleife enthält, kann I_C mit I gleichgesetzt werden. Es folgt somit, dass

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (4.10)$$

was wie gewünscht dem Betrag des Magnetfeldes in Gleichung (4.6) entspricht.

Das magnetische Feld einer Spule

Wir betrachten eine sehr lange Spule, die N/l Windungen je Längeneinheit hat. Ist die Spule sehr lang im Vergleich zum Durchmesser, können sich aus Symmetriegründen die verschiedenen Beiträge zum Magnetfeld nur so zusammensetzen, dass das resultierende B -Feld parallel zur Symmetrieachse liegt. Betrachten wir nun den in der Abbildung 4.2 eingezeichneten Integrationsweg C , so stellen wir fest, dass der eingeschlossene Strom nicht vom Integrationsweg außerhalb der Spule abhängt. Egal wie weit der Integrationsweg weg von der Spule gelegt wird, erhalten wir immer dasselbe Ergebnis. Da das Feld sehr weit weg von der Spule verschwinden sollte, muss es demzufolge überall außerhalb der Spule verschwindend gering sein.

Auch im Inneren der Spule hängt das Integral $\int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ nur davon ab, wieviele Leiterschleifen der Integrationsweg umfasst. Ist das Feld in der Spule wie angenommen tatsächlich parallel zur Symmetrieachse, muss somit unabhängig vom Abstand des Weges von der Symmetrieachse $lB = \mu_0 NI$ gelten, wobei l die Länge des Integrationsweges in der Spule darstellt und B den Betrag des magnetischen Feldes. Nach B aufgelöst findet man

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I. \quad (4.11)$$

Ist der Kern der Spule mit einem paramagnetischen Material gefüllt, also einem Material das kein eigenes Magnetfeld hat aber externe Magnetfelder verstärkt (siehe auch Kapitel 4.4), muss

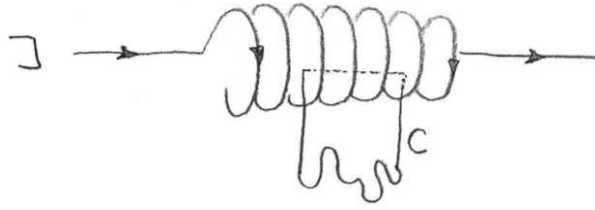


Abb. 4.2: Darstellung des Integrationsweg C bei der Berechnung des Feldes einer Spule. Der Integrationsweg umschließt drei Leiterschleifen, wodurch sich der Wert $3\mu_0 I$ auf der rechten Seite des Ampère'schen Gesetzes ergibt.

der Ausdruck noch mit μ_r multipliziert werden:

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{N}{l} I. \quad (4.12)$$

4.1.3 Das Gauß'sche Gesetz des Magnetismus

Da magnetische Feldlinien im Gegensatz zu elektrischen Feldlinien keine Quellen und keine Senken haben – es gibt weder isolierte Nordpole noch Südpole – lautet das Gauss'sche Gesetz für Magnetfelder, welches hier der Vollständigkeit halber erwähnt wird

$$\oint d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.13)$$

Weil magnetische Feldern nur Dipolen – oder höheren Polen – entspringt, lässt sich ein magnetisches Feld im Allgemeinen als Überlagerung von Dipolfeldern darstellen.

4.2 Die Energiedichte des magnetischen Feldes

Wie das elektrische Feld besitzt auch das magnetische Feld eine Energiedichte, die eine quadratische Funktion des Magnetfeldes ist:

$$v_{\text{pot}} = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0}. \quad (4.14)$$

Wieviel Energie steckt nun in einer Spule? Abgesehen von Randeffekten ist das Magnetfeld außerhalb der Spule vernachlässigbar klein. Innerhalb der Spule ist sein Betrag durch Gleichung (4.14) bestimmt. Da das Volumen der Spule durch die Gleichung Querschnitt A mal Länge l gegeben ist, ergibt sich für die potenzielle Energie des Magnetfeldes

$$V_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 A N^2}{l} I^2 \quad (4.15)$$

Die hier berechnete potenzielle Energie ist natürlich nichts anderes als die Arbeit, die benötigt wird, um eine Spule vom stromfreien zum stromführenden Zustand zu überführen, siehe Gleichung (3.42). Somit kann die Induktivität einer Spule, die einen Querschnitt A hat, N Windungen und eine Länge l , mit folgender Gleichung angegeben werden:

$$L = \frac{\mu_0 A N^2}{l}. \quad (4.16)$$

4.3 Der magnetische Dipol

Im letzten Beispiel des Kapitels 4.1.1 stellte sich heraus, dass sich das magnetische Feld auf der Symmetrieachse einer kreisförmigen Leiterschleife bei großen Abständen wie das eines elektrischen Dipols verhält. Dies war natürlich kein Zufall. Für die Auswertung des Gesetzes von Biot-Savart kann nämlich, ähnlich wie auch für den elektrischen Dipol, eine Fernfeldnäherung vorgenommen werden. Sie gilt dann, wenn die Abstände innerhalb des geschlossenen Leiterkreises klein gegenüber dem kleinsten Abstandes zwischen Beobachter und Leiterschleife sind. Wir verzichten hier auf die Herleitung und stellen nur das Ergebnis vor. Unter Umständen holen wir die Herleitung in einem Bonusproblem nach.

Zunächst definieren wir das magnetische Dipolmoment einer Leiterschleife als

$$\mathbf{m} = -\frac{I}{2} \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{l}. \quad (4.17)$$

Das magnetische Moment einer kreisförmigen Leiterschleife, die den Radius r hat und in der xy -Ebene liegt, beträgt demnach $\mathbf{m} = I\pi r^2 \mathbf{e}_z$. Dies wiederum heißt bei beliebiger Orientierung der Leiterschleife im Raum

$$\mathbf{m} = I A \mathbf{e}_A, \quad (4.18)$$

wobei A die Kreisfläche ist und der Einheitsvektor $\mathbf{e}_A$ senkrecht zur Leiterschleife steht. Gleichung (4.18) gilt nicht nur für kreisförmige Leiterschleifen sondern auch, wie sich leicht zeigen lässt (hervorragende Übung!), für rechteckige und damit für beliebig geformte Leiterschleifen, die in einer Ebene liegen.

Die Orientierung des magnetischen Dipols einer Leiterschleife wird wieder mit der rechten Hand festgelegt. Wenn der Daumen abgespreizt ist und die Finger einen Kreis in Richtung des Stromes bilden, zeigt der Daumen in Richtung von $\mathbf{e}_A$. Gleichung (4.18) gilt, wie sich recht leicht zeigen lässt, für beliebige Formen von Leiterschleifen, die in einer Ebene liegen. Die “obere” Seite der Leiterschleife wird auch *Nordpol* genannt, die “untere” Seite *Südpol*.

Zusatzwissen: Oft wird Strom in der Magnetostatik von einer kontinuierlichen Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ getragen, die sich mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ bewegt. Zur Berechnung von Magnetfeldern oder Dipolmomenten muss dann in allen relevanten Integralen der Ausdruck $I \oint d\mathbf{l} \dots$ durch $\int dV \mathbf{j} \dots$ ersetzt werden. Dabei stellt $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ die (elektrische) Stromdichte dar. Dies ist z.B. dann relevant, wenn das magnetische Moment berechnet wird, das der Bahndrehimpuls der Elektronen in einem Atom verursacht.

Das von einem magnetischen Dipol erzeugte Feld hat dieselbe Abstands- und Winkelabhängigkeit wie das elektrische Dipolfeld:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m} r^2}{r^5}. \quad (4.19)$$

so dass die Feldlinien eines magnetischen Dipols genauso aussehen wie die eines elektrischen Dipols.

Weil sowohl die Feldenergie als auch das Dipolfeld dieselbe funktionale Abhängigkeiten haben, lassen sich direkt weitere Analogien finden. Schließlich ist das Einzige, das zur Berechnung von Kräften und Drehmomenten bekannt sein muss, die Gesamtenergie als Funktion von Position und Orientierung des Dipols. Die Gesamtenergie ergibt sich wiederum aus der Feldenergie und diese wiederum aus den Feldern.

Es können also viele Formeln, die für elektrische Dipole gelten, auf magnetische Dipole anwenden. So ist die Energie eines permanenten magnetischen Dipols im Magnetfeld durch

$$V_{\text{pot}} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (4.20)$$

gegeben. Ein magnetischer Dipol erfährt keine Kraft in einem konstanten Magnetfeld, jedoch ein Drehmoment

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (4.21)$$

Damit ein magnetischer Dipol beschleunigt wird, bedarf es eines inhomogenen Magnetfeldes.

4.3.1 Magnetischer Dipol und (Bahn-) Drehimpuls

Eine Ladung q , welches sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r bewegt, erzeugt im Mittel einen Strom $I = qv/(2\pi r)$. Damit bewirkt die Ladung (im Mittel) dasselbe magnetische Feld wie eine entsprechende Leiterschleife. Das dazu gehörige magnetische Moment ist wiederum proportional zum Bahndrehimpuls L , wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} m &= \underbrace{\frac{qv}{2\pi r}}_I \underbrace{\pi r^2}_A \quad (\text{erweitern mit der Masse der Ladung } m_q/m_q) \\ &= \frac{q}{2m_q} \underbrace{m_q vr}_L. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Kennen wir das magnetische Moment einer bewegten Ladung (z.B. bezüglich der z -Achse) so kennen wir auch sein Drehmoment. Und nun wissen Sie, warum Chemiker und Quantenphysiker den (Bahn-) Drehimpuls mit magnetischen Quantenzahlen beschreiben. Warum der Zusammenhang zwischen magnetischem Moment und Bahndrehimpuls auch für Materialwissenschaftler von Interesse ist, erfahren wir später.

Zusatzwissen: Neben dem Bahndrehimpuls gibt es auch den sogenannten *Eigendrehimpuls* bzw. *Spin* S . Dieser ist zwar ein Drehimpuls resultiert aber *nicht* aus der Drehung von (Elementar-) Teilchen um ihre eigene Achse, wie der Name Eigendrehimpuls vermuten lassen könnte. Dennoch gilt auch für Spins ein linearer Zusammenhang der Form

$$m = g \frac{q}{2m_q} S. \quad (4.23)$$

Die dimensionslose Konstante g wird Landé-Faktor genannt. Er hängt jeweils von der Teilchensorte ab. Für Elektronen ist sein Wert $g_e \approx 2$ und für Protonen $g_p \approx 5,5857$. Es kann auch ein verallgemeinerter Landé Faktor für das neutrale Neutron über Energiebilanzen definiert werden. Sein Wert beträgt $g_n \approx -3,826$.

4.4 Magnetismus in Materie

Wie es bei elektrischen Feldern in Materie eine Unterscheidung zwischen elektrischem Feld $\mathbf{E}$ und dielektrischer Verschiebung $\mathbf{D}$ gibt, so gibt es auch zwei verschiedene Magnetfelder. Neben dem uns bisher bekannten Magnetfeld $\mathbf{B}$, das korrekt magnetische Flussdichte heißt, gibt

es die magnetische Feldstärke $\mathbf{H}$. Sie wird je nach Kontext ebenfalls als Magnetfeld bezeichnet. Solange Magnetismus in der Materie betrachtet wird, sollte das Wort Magnetfeld daher eher vermieden werden und klar zwischen Flussdichte und Feldstärke unterschieden werden. Der Zusammenhang der beiden Felder besteht über die Magnetisierung, die als magnetisches Dipolmoment je Volumen definiert ist:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{V} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (4.25)$$

Ferner gilt für die magnetische Feldenergie – ob Vakuum oder nicht –

$$v_{\text{pot}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \quad (4.26)$$

Neben den dielektrischen Eigenschaften hat Materie (offensichtlich) auch magnetische Eigenschaften. Zunächst kann man grob zwischen *Diamagneten*, *Paramagneten* und *Ferromagneten* unterscheiden.

Ferromagneten besitzen eine spontane bzw. permanente Magnetisierung. In gewisser Weise sind sie den Ferroelektrika ähnlich. Ein wesentlicher Unterschied ist jedoch die Natur der Wechselwirkung. In Ferroelektrika richten sich benachbarte Dipole wegen der direkten elektrischen Wechselwirkung parallel aus. In Ferromagneten spielt die direkte magnetische Wechselwirkung aber keine nennenswerte Rolle. Magneten würden sonst erst bei Temperaturen unterhalb $10 \mu\text{K}$ entstehen und Magnetismus würde in der Regel durch die Spins der Kerne und nicht der Elektronen entstehen. Die Wechselwirkung von Spins ist eine indirekte Folge der Quantenmechanik und des Fermi-Prinzips. So kann es sich unter gewissen Umständen aufgrund der sogenannten Austauschwechselwirkung lohnen, wenn Elektronen auf benachbarten Gitterplätzen ihre Spins parallel ordnen. Je nach Sach- bzw. Orbitallage, kann es aber energetisch günstiger sein, wenn benachbarte Atome ihre Elektronen anti-parallel orientieren. Dies kann dann auch zum *Antiferromagneten* führen, in der ein Kristall in zwei Untergitter unterteilt werden kann, die jeweils eine entgegengesetzt gleich große Magnetisierung haben.

Paramagneten besitzen kein spontanes magnetisches Moment. Sie richten ihre magnetischen Momente jedoch parallel zum externen Feld aus und verstärken somit das Magnetfeld. Die Kopplung zwischen magnetischen Momenten (Spins) ist allerdings nicht hinreichend stark, um gegen das thermische Rauschen bzw. gegen die Entropie einen Ferromagneten zu erzeugen. Paramagneten sind somit das magnetische Pendant zum Dielektrikum.

Diamagneten schwächen das externe Magnetfeld. In Diamagneten sind alle Elektronen zu Spin null gepaart, weshalb ihre Spins sich nicht parallel zur magnetischen Feldstärke $\mathbf{H}$ ausrichten wollen – zumindest solange H nicht außergewöhnlich groß ist. Eine quantitative Beschreibung des Diamagnetismus bedarf einer quantenmechanischen Rechnung. Anschaulich gesprochen ist die Sachlage aber wie folgt: Die Quantenmechanik bedingt eine ständige Bewegung der Elektronen. Bewegte Elektronen werden durch ein magnetisches Feld beschleunigt und zwar so, dass die resultierende Bewegung dem Magnetfeld entgegenwirkt.

In kubischen (oder höher symmetrischen) Paramagneten und Diamagneten gilt für nicht zu große Feldstärken

$$\mathbf{M} = (\mu_r - 1)\mathbf{H}, \quad (4.27)$$

wobei μ_r magnetische Permeabilität genannt wird und

$$\chi \equiv \mu_r - 1 \quad (4.28)$$

magnetische Suszeptibilität. Die Flussdichte ergibt sich dann zu

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}. \quad (4.29)$$

Bei Kristallen mit einer geringeren Symmetrie ist die magnetische Suszeptibilität ein Tensor zweiter Stufe. In Diamagneten gilt per Definition $\chi_r < 0$, in Paramagneten gilt $\mu > 0$. Nichtleiter sind in der Regel Diamagneten für die, die Näherung $\mu_r = 1$ durchaus sinnvoll ist. Typische Abweichungen liegen in der Größenordnung 10^{-5} . Für Supraleiter (der sogenannten 1. Art) gilt jedoch $\mu_r = 0$. In sie kann keine magnetische Flussdichte eindringen. “Gewöhnliche” Metalle sind leicht paramagnetisch. Solche Paramagneten, die bei tiefen Temperaturen ferromagnetisch werden – insbesondere Übergangsmetalle und ihre Legierungen – zeichnen sich bei Raumtemperaturen jedoch durch sehr hohe Werte von μ_r aus.

4.5 Kraft des Magnetfelds auf bewegte Ladungen

Bisher haben wir gelernt, dass bewegte Ladungen Magnetfelder erzeugen. Als Folge ändern die Ladungen die Gesamtenergie des magnetischen Feldes. Dies wiederum bedeutet, dass magnetische Felder – sozusagen im verallgemeinerten Sinne des Prinzips von Actio und Reactio – eine Kraft auf bewegte Ladungen ausüben. Diese Kraft heißt **Lorentzkraft**

$$\mathbf{F}_B = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.30)$$

Streng genommen beinhaltet die Lorentzkraft auch die Kraft des elektrischen Feldes auf die Ladung:

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.31)$$

Die (rein magnetische) Lorentzkraft liegt der Definition des Ampères zugrunde, das ja über die Kraftwirkung zweier stromführender Drähte definiert ist.

Zur Bestimmung der Richtung der Lorentzkraft verwenden wir wieder die *Rechte-Hand-Regel* bzw. die Drei-Finger-Regel, die natürlich für allgemeine Kreuzprodukte gilt: Der Daumen der rechten Hand zeigt in Richtung von $\mathbf{v}$, der Zeigefinger in Richtung von $\mathbf{B}$ und nun strecken wir den Mittelfinger soweit aus, dass er senkrecht zu der von Daumen und Zeigefinger aufgespannten Ebene zeigt. Der Mittelfinger gibt nun die Richtung der Lorentzkraft an.

Man beachte, dass die magnetische Lorentzkraft keine dissipative Kraft ist, obgleich sie, wie eine Dämpfungskraft auch, linear in der Geschwindigkeit ist. Weil sie jedoch zu jeder Zeit senkrecht zur Geschwindigkeit steht, verrichtet sie nie Arbeit, sodass sie nicht zur Änderung der Energie beiträgt. In diesem Sinne kann die magnetische Lorentzkraft konservativ genannt werden. Im engeren Sinn wird manchmal gefordert, dass sich konservative Kräfte als Gradient einer (skalaren) Potentialfunktion darstellen lassen. Dies trifft auf die magnetische Lorentzkraft offensichtlich nicht zu, weil sie linear in der Geschwindigkeit abhängt. Bei dieser engeren Definition einer konservativen Kraft müsste die magnetische Lorentzkraft als nicht-konservativ gewertet werden.

Zusatzwissen: In einer kompletten Beschreibung des elektromagnetischen Feldes, die der Beobachtung Rechnung trägt, dass Information sich mit der großen aber endlichen Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, ist die oben getroffene Aussage *Die (magnetische) Lorentzkraft steht aber zu jeder Zeit senkrecht zur Geschwindigkeit, sodass sie die kinetische Energie der Ladung nicht ändert* nicht ganz korrekt. Eine Ladung auf einer Kreisbahn entspricht einem zeitabhängigen Dipol. Dieser wiederum strahlt, was Energie kostet und die Ladung dann eben doch, ähnlich wie eine Dämpfung, ausbremst. Die Energie ist zwar nicht verloren – wie bei anderen Dämpfungsprozessen auch – aber sie wird der Ladung entzogen. Letztendlich müssten in diesem Bild Elektronen in Atomkernen unter Abgabe von elektromagnetischer Strahlung verschwinden. Warum dies nicht passiert, war die wichtigste Frage der Physik zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Sie wurde in den zwanziger Jahren durch die Quantenmechanik beantwortet.

4.5.1 Kraft des Magnetfelds auf ein Leiterkabel

Beindet sich ein stromführendes Kabel in einem magnetischen Feld, so wirkt auf die in dem Kabel transportierte Ladung und damit auf das Kabel selbst, eine Kraft. Zur Berechnung der Kraft zwischen zwei parallelen Kabeln legen wir das erste der beiden Kabel mit Strom I_1 auf

die z -Achse und das andere mit Strom I_2 auf eine im Abstand r zur z -Achse parallel liegenden Achse. Das magnetische Feld durch Kabel 1 an einem Ort $\mathbf{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ des Kabel 2 ist, wie aus Gleichung (4.10) ersichtlich, $\mathbf{B} = \mu_0 I_1 \mathbf{e}_\varphi / (2\pi r)$, wobei $\mathbf{e}_\varphi = r(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$. Somit wirkt auf ein Leitersegment der Länge Δz die Kraft

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F} &= \underbrace{\Delta q \mathbf{v}}_{I_2 \Delta z \mathbf{e}_z} \times \underbrace{\mathbf{B}}_{\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 \Delta z}{2\pi r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \Delta z}{2\pi r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Sind die Vorzeichen von I_1 und I_2 identisch, wird Kabel 2 somit in Richtung von Kabel 1 gezogen. Bei unterschiedlichen Vorzeichen stoßen sich die beiden Kabel ab.

Die Auswertung von Gleichung (4.32) für $r = 1$ m und $I_1 = I_2 = 1$ A ergibt genau eine Anziehungs-Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N je Meter zwischen zwei parallelen Kabeln. Dieses Ergebnis liegt der Definition der SI-Basiseinheit Ampère zugrunde.

4.5.2 Bewegung freier Ladungen im Magnetfeld

Bewegt sich eine freie Ladung in einem externen Magnetfeld, so bewirken nur die zum Magnetfeld senkrecht stehenden Komponenten der Geschwindigkeit eine Beschleunigung des Elektrons. Da die Bewegung parallel zum Magnetfeld nichts zur Sache tut, betrachten wir also eine Ladung, die sich in der xy -Ebene und in einem auf der Ebene senkrecht stehenden Magnetfeld $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ bewegt. Seine Bewegungsgleichung lautet also

$$m_q \dot{\mathbf{v}} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.33)$$

In der Mechanik haben wir gelernt, dass eine Kraft, die zu jeder Zeit senkrecht zur Geschwindigkeit steht, den Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert. Ist zudem der Betrag der einwirkenden Kraft konstant, so kommt es zu einer Kreisbewegung. Die Zentripetalkraft $F_Z = m_q v^2 / r$ hält der Lorentzkraft genau die Waage, sodass

$$m_q \frac{v^2}{r} = qvB_0. \quad (4.34)$$

Die Kreisfrequenz der Bewegung ergibt sich dann dank der Relation $v = \omega r$ zu

$$\omega = \frac{q}{m_q} B_0. \quad (4.35)$$

Die dazugehörige Frequenz $\nu = \omega / (2\pi)$ ist als Zyklotronfrequenz bekannt. Sie hängt interessanter Weise nicht von der Geschwindigkeit der Ladung ab.

4.5.3 Bewegung eines Drehimpulses im Magnetfeld

In Kapitel 4.3 haben wir aufgrund der Analogien zwischen magnetischen und elektrischen Dipolen festgestellt, dass ein magnetischer Dipol $\mathbf{m}$ ein Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ in einem

Magnetfeld erfährt. Zudem wurde in Kapitel 4.3.1 ein Zusammenhang zwischen magnetischem Moment und (Bahn-) Drehimpuls der Art $\mathbf{m} = (gq/2m_q)\mathbf{L}$ hergestellt. Die dort gezeigte Herleitung gilt auch für Vektoren und nicht nur für Beträge. Da ein Drehmoment nichts anderes ist als die zeitliche Änderung eines Drehimpulses mit der Zeit, ergibt sich die folgende Bewegungsgleichung:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{gq}{2m_q} \mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (4.36)$$

Diese Gleichung ist isomorph zur Bewegungsgleichung eines freien Teilchens im Magnetfeld. Deshalb ergibt sich für die Kreisfrequenz der Kreisbewegung

$$\omega = \frac{gq}{2m} B_z. \quad (4.37)$$

was im Fall eines Bahndrehimpulses, $g = 1$, identisch mit der Zyklotronfrequenz ist, bei der Rotation von Drehimpulsen aber Larmor-Frequenz genannt wird.

Man beachte in dieser Rechnung, dass der Drehimpuls – und nicht wie vorher ein freies Teilchen – um eine Achse rotiert.

Im gegebenen Kontext eines präzedierenden magnetischen Momentes ist die wichtigste Anwendung jedoch die *Kernspinresonanzspektroskopie*. Sie wird sehr divers zur Untersuchung von Flüssigkeiten und Festkörpern in Chemie, Physik und Medizin und damit auch in der Materialwissenschaft als Analyse-Werkzeug eingesetzt. Durch die Präzession von Kernspins und dem Übergang zwischen verschiedenen Quantenzuständen werden Photonen unterschiedlicher Frequenz absorbiert oder emittiert. Diese Frequenzen hängen vom lokalen Magnetfeld ab, das wiederum je nach Umgebung – also z.B. je nach chemischer Bindung – unterschiedliche Werte annimmt. Durch die große Masse von Kernen liegen diese Frequenzen dann in einem technisch zugänglichen Frequenzfenster.

4.5.4 Der Hall Effekt

Liegt in einem Leiter- oder Halbleiter ein externes elektrisches Feld vor und steht senkrecht dazu ein magnetisches Feld, erfahren bewegte Ladungsträger eine Beschleunigung durch beide Felder. Wir betrachten somit eine Situation wie in Abbildung 4.3 gezeigt.

Ohne magnetisches Feld hätten wir die in Kapitel 2.5.1 diskutierte Situation. Im Fließgleichgewicht werden die durch das externe elektrische Feld $E_x = U_x/L$ bedingten Kräfte durch die der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfungskräfte kompensiert, wobei U_x die externe Spannung ist, die den Strom I erzeugt. Es resultiert eine Driftgeschwindigkeit v_x der Elektronen. Wenn Sie sich an die Herleitung der Gleichung 2.57 nicht erinnern, ist jetzt eine gute Zeit, sie noch einmal vor dem Weiterlesen nachzuvollziehen. Sie werden das vermutlich nicht bereuen.

Als nächstes berücksichtigen wir auch den Effekt des magnetischen Feldes. Es führt zu einer Ablenkung der Ladungen, gemäß der Lorentzkraft. Unabhängig vom Vorzeichen der Ladungen, werden freie Ladungsträger in die negative y -Richtung abgelenkt, wenn der Strom parallel zu $\mathbf{e}_x$ fließt und das Magnetfeld parallel zu $\mathbf{e}_z$ ist. Es sammeln sich also am oberen Rand des Materials Ladungen an. Diese Ansammlung bewirkt ein elektrisches Feld, das der magnetischen Lorentzkraft entgegenwirkt. Im (finalen) Fließgleichgewicht müssen sich die Kraftwirkungen der beiden Felder $F_z = qv_x B_y + qE_z$ genau kompensieren. Dies führt zu der (Fließ-) Gleichgewichtsbedingung

$$qv_x B_y = -qE_z \quad (4.38)$$

$$\approx q \frac{U_H}{h}. \quad (4.39)$$

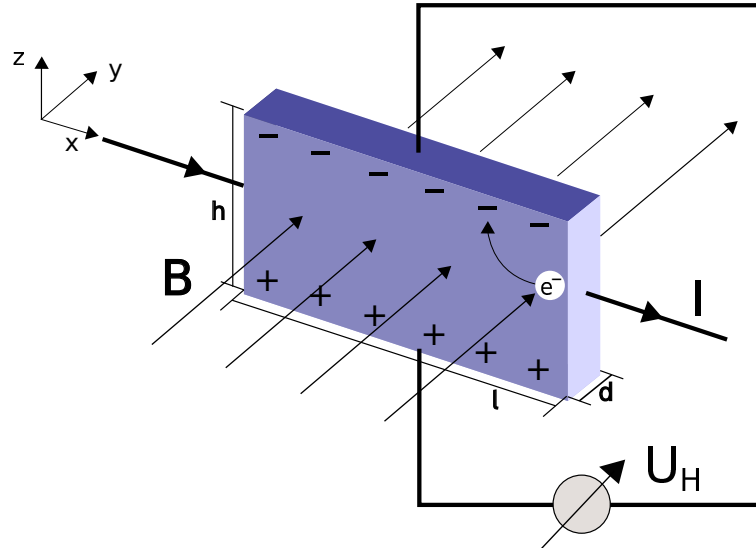


Abb. 4.3: Schematischer Aufbau einer Hallsonde. Der Strom I fließt in x -Richtung. Das $\mathbf{B}$ -Feld ist parallel zur y -Achse. Sowohl positive als auch die in der Abbildung gezeigten negativen freien Ladungsträger werden zu positiven z -Werten, also nach oben, abgelenkt. Zurück bleiben die (nicht beweglichen) positiven Kationen.

Die Driftgeschwindigkeit v_x eliminieren wir mit Hilfe des Stroms

$$I = \underbrace{q \cdot \rho \cdot v_x}_{\text{Stromdichte}} \cdot \underbrace{d \cdot h}_{\text{Querschnitt}}, \quad (4.40)$$

sodass ein linearer Zusammenhang zwischen Strom und der sogenannten Hall Spannung vorliegt.

$$U_H = \frac{B_y}{\rho \cdot q \cdot d} I. \quad (4.41)$$

Die Proportionalitätskonstante heißt Hall Widerstand

$$R_H = \frac{B_y}{\rho \cdot q \cdot d}. \quad (4.42)$$

Anmerkung: Man beachte, dass ein Hall Widerstand bei negativen Ladungsträgern einen negativen Wert annimmt. Da der Hall-Widerstand kein dissipative Widerstand ist und die Hall-Spannung sowieso bei Änderung des Vorzeichens der Ladung ihr Vorzeichen ändert, ist ein negative Widerstand also durchaus erlaubt und birgt keinerlei Möglichkeit ein Perpetuum mobile zu bauen.

Den linearen Zusammenhang zwischen Hall-Spannung und Strom wird in Hall-Sensoren zur Messung von Magnetfeldern verwendet. Damit überhaupt ein signifikanter Strom durch die Sonde fließt, darf die Anzahl der Ladungsträger nicht zu klein sein. Da für eine gut messbare Hallspannung der Hall-Widerstand hinreichend groß sein sollte, darf die Dichte der freien Ladungsträger jedoch nicht zu gering sein. Deshalb werden Halbleiterplättchen in Hall-Sonden verwendet.

Auch Ströme können dank des Hall Effekts kontaktfrei gemessen werden. Schließlich kann man oxidierte Bereiche in magnetisiertem Stahl mittels einer Hall Sonde grob lokalisieren. Die oxidierten Bereiche zeigen sich quasi durch fehlendes Magnetfeld. Auch hier operiert die Hall Sonde nicht invasiv, weshalb sie in der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung eine gewisse Rolle spielt.

Historisch gesehen wurden Hall-Sonden entwickelt, um das Vorzeichen der Ladungen zu bestimmen, die den elektrischen Strom führen. Im Gegensatz zum Ohm'schen Widerstand ist der Hall-Widerstand nämlich nicht quadratisch sondern linear im Vorzeichen der Ladung. In Metallen gibt es de-facto nur negative Ladungsträger. Halbleiter hingegen können sowohl positive als auch negative Ladungsträger haben. Die negativen Ladungsträger sind, wie in Metallen auch, Elektronen, die positiven sind sogenannte Elektronenlöcher.

Zusatzwissen: Um den genauen Mechanismus der Elektronenlöcher zu verstehen, bedarf es wieder der Quantenmechanik und im konkreten Falle der Bandstruktur von Festkörpern. Grob gesprochen geht es so: Ein volles Band verhält sich wie ein Nichtleiter. Nichts bewegt sich, selbst wenn ein Feld anliegt. Die Elektronen am oberen Ende des Bandes haben bei größeren Impulsen eine kleinere kinetische Energie und verhalten sich daher quasi wie Elektronen mit negativer Masse. Und genau diese Elektronen fehlen, um den p -dotierten Halbleiter (Fremdatome, die sich von den verbliebenen Si-Atome Elektronen "klauen") zum (quasi-) Nichtleiter zu machen. Bei anliegendem Feld hat man also "nichts" minus ein Elektron. Das Konstrukt nichts-minus-ein-Teilchen wird in der Physik gerne als Antiteilchen beschrieben und erhält in diesem Fall den Terminus Technikus Elektronenloch.

5 Elektromagnetismus

Versionsnummer des Kapitels: -1.0 (aus Zeitgründen). Bitte lesen Sie im Notfall die einschlägige Literatur.

Im letzten Kapitel dieses Semesters sollen nun auch zeitabhängige Felder behandelt werden. Die dem (klassischen) Elektromagnetismus zu Grunde liegende Physik, die Maxwell in seinen vier berühmten Gleichungen zusammengefasste, ermöglichen es uns dann zusammen mit der Lorentzkraft und unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen und Materialeigenschaften, elektrische Ströme sowie elektrische und magnetische Felder zu bestimmen. Der Elektromagnetismus liegt somit offensichtlich der gesamten Elektrotechnik zu Grunde inklusive der Telekommunikation aber auch der Optik, den heute immer wichtiger werdenden Elektromotoren und Windkraftwerken um nur einige Beispiele zu nennen.

5.1 Elektromagnetische Induktion

Da ein elektrischer Strom, wie wir nun wissen, ein magnetisches Feld erzeugt, liegt der Gedanke nahe, dass umgekehrt ein magnetisches Feld auch elektrischen Strom bzw. Spannung erzeugen bzw. *induzieren* kann. Dies trifft in der Tat auch zu. Betrachten wir eine bewegliche Leiterschleife, wie in der Abb. 5.1a dargestellt. Wird die Leiterschleife nach rechts bewegt, wirkt auf die freien Ladungsträger, die Elektronen, die Lorentzkraft. Es kommt zur Ladungstrennung zwischen positiven und negativen Ladungen und demzufolge zu einem elektrischen Feld. Im Gleichgewicht heben sich die Kräfte des magnetischen und des elektrischen Feldes genau auf, sodass für die y -Komponente des Kraftvektors gilt:

$$\begin{aligned} q(-v_x B_z + E_{\text{ind},y}) &= 0 \\ \Rightarrow U_{\text{ind}}/l &= -v_x B_z, \end{aligned} \quad (5.1)$$

wobei $E_{\text{ind},y}$ das im Leiter induzierte magnetische Feld auf dem sich bewegenden Bügel ist. Somit ist die induzierte Spannung so groß wie das Skalarprodukt

$$U_{\text{ind}} = -\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{A}}, \quad (5.2)$$

wobei $\dot{\mathbf{A}}$ die zeitliche Änderung des Flächenvektors $\mathbf{A}$ ist.

Es stellt sich heraus, dass eine Spannung in der Leiterschleife auch durch ein zeitabhängiges Magnetfeld erzeugt werden kann, selbst wenn sich die Fläche der Leiterschleife nicht ändert. Dies passiert z.B. wenn sich ein Stabmagnet schnell in Richtung einer Leiterschleife bewegt wie in Abb. 5.1b gezeigt. Es stellt sich (experimentell) heraus, dass sich die induzierte Spannung zu

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A} \quad (5.3)$$

ergibt. Führen wir den magnetische Fluss als

$$\Phi = \int d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (5.4)$$

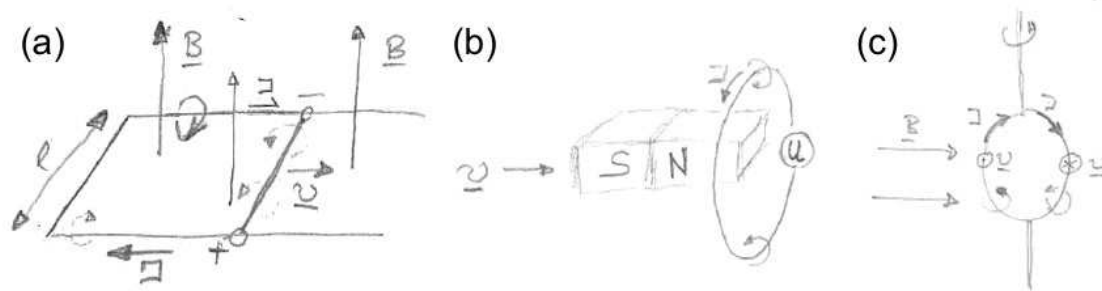


Abb. 5.1: Drei verschiedene Arten einen elektrischen Strom durch Magnetfelder zu induzieren. (a) Änderung der Größe einer Leiterschleife in einem konstanten, externen Magnetfeld. (b) Zeitliche Änderung des Magnetfelds in einer fixierten Leiterschleife. (c) Änderung der Orientierung einer Leiterschleife relativ zu einem konstanten, externen Magnetfeld.

ein, lassen sich die letzten beiden Gleichungen kompakt zu

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi \quad (5.5)$$

zusammenfassen. Die Orientierung der Leiterschleife wählen wir so, dass ein gedachter Strom in die Richtung der gekrümmten Finger der rechten Hand zeigt und der Daumen parallel zu $\mathbf{A}$.

Bevor wir zu Anwendungen dieser Gleichung kommen, schauen wir uns das Vorzeichen der induzierten Spannung in der bewegten Leiterschleife an. Dazu betrachten wir den Prozess der Ladungsseparation auf dem sich bewegenden Bügel. Durch Anwendung der drei-Finger-Regel erhalten wir die Richtung des Stromes und mithilfe der rechten Hand-Regel die Richtung des magnetischen Feldes. Die Richtung des induzierten, magnetischen Feldes ist bei der gezeigten Schlaufenvergrößerung dem ursprünglichen Magnetfeld entgegengesetzt. Dass die durch Induktion bewirkten Ströme – und später auch Felder und Kräfte – der Ursache ihrer Entstehung (Vergrößerung des magnetischen Flusses durch die Schlaufe) entgegenwirken ist auch als *Lenz'sche Regel* bekannt.

5.1.1 Die Selbstinduktion

Diskutiere das Vorzeichen der Selbstinduktion in einer Leiterschleife.

Berechne den Wert der Selbstinduktion für eine Spule.

5.1.2 Technische Anwendungen des Induktionsgesetzes

Das Induktionsgesetz hat insbesondere drei wichtige technische Anwendungen, die im Folgenden kurz angerissen werden sollen, nämlich den elektrischer Generator, den Elektromotor und den Spannungstransformator.

Spannungsgenerator.

Siehe Fig. 5.1c. Externe mechanische Kraft bewirkt Rotation der Leiterschleife (oder des Magneten). Als Folge dessen wird eine Spannung induziert.

Elektromotor.

Diesmal wird die (Wechsel-) Spannung vorgegeben. Es resultiert ein Drehmoment auf die Leiterschleife, sodass mechanische Arbeit verrichtet werden kann.

Der Spannungstransformator

Magnetische Feldlinien in Transformator “eingesperrt”. Verhältnis der Spannungen:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (5.6)$$

(Ursprüngliche Formel im Skript war inkorrekt. Herleitung in Vorlesung indes richtig.)

5.2 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

Das Ampère'sche Gesetz hat ein gravierendes Problem, wenn es während des Aufladevorgangs eines Kondensators verwendet wird: Es gibt keine eindeutige bzw. eine diskontinuierliche Antwort darauf, wie groß das magnetische Feld in Richtung $\mathbf{e}_\varphi$ am Rand eines Kondensators ist, der aufgeladen wird. Schließt der Integrationsweg $\mathcal{C}$ das stromführende Kabel gerade noch ein, ergibt das Ampère'sche Gesetz ein Magnetfeld (in Richtung von $\mathbf{e}_\varphi$) mit dem Wert $\mu_0 I / (2\pi r)$. Schließt es das Kabel gerade nicht mehr ein, ergibt sich $B_\varphi = 0$. Diese Diskontinuität ist weit weg vom Kondensator nicht sinnvoll.

Um das Ampère'sche Gesetz zu “retten”, kann ein *Verschiebungsstrom* eingeführt werden:

$$I_D \equiv \int_A d\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{D}}. \quad (5.7)$$

Dieser wird im Ampère'schen Gesetz zum eingeschlossenen Strom dazu addiert und die eben diskutierte Problematik der Abhängigkeit des magnetischen Feldes vom Integrationsweg fällt weg. Mit dieser letzten Gleichung sind die Maxwell'schen Gleichungen komplett.

5.3 Die Maxwell'schen Gleichungen

Bisher haben wir die Wechselwirkungen zwischen elektrischen und magnetischen Feldern über Integralgleichungen beschrieben. Die bisherigen Feldgleichungen lauten (wenn wir sie allgemein für Materie formulieren)

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} = Q_{\text{in } V} \quad (5.8)$$

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.9)$$

$$\oint_{\partial A} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = - \int_A d\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}} \quad (5.10)$$

$$\oint_{\partial A} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{H} = I_{\text{in } A} + \int_A d\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{D}}, \quad (5.11)$$

wobei häufig lineare Relationen zwischen $\mathbf{D}$ und $\mathbf{E}$ für Dielektrika sowie zwischen $\mathbf{H}$ und $\mathbf{B}$ für Dia- und Paramagnetika angenommen werden können. Diese Gleichungen entsprechen dem

Gauß'schen Gesetz für das elektrische Feld (5.8) und für das magnetische Feld (5.9) sowie dem Induktionsgesetz (5.10) und dem erweiterten Ampère'schen Gesetz (5.11).

Qualitative Diskussion: Ein elektrisches Feld, das sich ändert, bewirkt ein Magnetfeld und umgekehrt bewirkt ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld ein elektrisches Feld. Somit ist die zweite Ableitung der Felder proportional zu sich selbst. Da in einer der Gleichungen ein Minus steht (im Wesentlichen ein Ausdruck der Lenz'schen Regel) $\Rightarrow$ ähnliche Situation wie beim harmonischen Oszillator; es kommt zu Schwingungen. In der Tat ist das dann im LC-Kreis ja auch so, dass ständig magnetische in elektrische Feldenergie umgewandelt wird und zurück. Siehe wieder harmonischer Oszillator: Permanente Umwandlung zwischen kinetischer und potentieller Energie.

Mit etwas Vektoranalysis (z.B. Mathe 3) können diese Integralgleichungen zu Differentialgleichungen umgeformt werden. Wenn $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ als Stromdichte definiert ist, lauten die Gleichungen dann

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (5.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}. \quad (5.15)$$

Im Vakuum ($\rho = 0, \mathbf{j} = 0$) vereinfachen sich die Gleichungen, denn es gibt dann nur noch zwei Felder, deren Lösungen gefunden werden müssen. Schließlich kann in diesem Fall $\mathbf{D}$ durch $\epsilon_0 \mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ durch $\mathbf{B}/\mu_0$ ersetzt werden.

Diese Gleichungen bilden dann die Grundlage für die Beschreibung der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen. So können wir durch "Verheiraten" des Induktionsgesetzes mit dem verallgemeinerten Ampère'schen Gesetzes z.B. die folgende Gleichung für das elektrische Feld hergeleitet werden:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \ddot{\mathbf{E}}. \quad (5.16)$$

Diese Differentialgleichung kann wiederum durch den Ansatz

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\{\pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega(\mathbf{k})t\}} \quad (5.17)$$

gelöst werden. Da wegen des Gauß'schen Gesetzes im Vakuum $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$ gelten muss (elektrische Feldlinien stehen somit immer senkrecht zur Ausbreitungs-Richtung $\mathbf{k}/k$ der Welle), folgt für die Betragsquadrate des Wellenvektors und der Frequenz

$$(\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - k^2) \mathbf{E}_0 = 0. \quad (5.18)$$

Dies wiederum bedeutet, dass entweder $\mathbf{E}_0 = 0$ sein muss, oder aber

$$k^2 = \frac{1}{c^2} \omega^2(\mathbf{k}), \quad (5.19)$$

wobei

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (5.20)$$

die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Ausbreitung von (elektromagnetischen) Wellen in Medien ist selbst ein großes Thema. Es sei als Schluss-Satz vor dem nächsten Semester angemerkt, dass die gesamte Optik (inklusive der geometrischen Optik, wie Strahlengang an Grenzflächen und Brechungsgesetze) aus den hier vorgestellten Maxwellgleichungen abgeleitet werden kann.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Elektrostatik	2
1.1	Die elektrische Ladung	2
1.2	Das Coulomb Gesetz	3
1.3	Das elektrische Feld	9
1.3.1	Das elektrische Feld allgemeiner Ladungsverteilungen	9
1.3.2	Elektrische Felder an Metalloberflächen	13
1.3.3	Anwendung: Braun'sche Röhre	15
1.3.4	Gaußsches Gesetz	17
1.4	Elektrisches Potenzial und potenzielle Energie	20
1.4.1	Mathematischer Einschub: Gradient	22
1.5	Kondensatoren und Feldenergie	25
1.5.1	Parallelschaltung von Kondensatoren	26
1.5.2	Serienschaltung von Kondensatoren	27
1.5.3	Energie in einem Kondensator	28
2	Materie und elektrische Felder	31
2.1	Ionenkristalle	31
2.1.1	Vorbetrachtung: Das NaCl Ionenpaar	32
2.1.2	Der eindimensionale Ionenkristall	34
2.1.3	Der höherdimensionale Ionenkristall	36
2.2	Der elektrische Dipol	38
2.2.1	Elektrisches Potenzial und Feld eines statischen Dipols	38
2.2.2	Statischer Dipol im elektrischen Feld	40
2.2.3	Wechselwirkung von Dipolen mit Ladungen und anderen Dipolen	41
2.2.4	Starre Dipole unter thermischem Rauschen	41
2.2.5	Induzierte Dipole	43
2.3	Dielektrika	45
2.4	Polarisation und dielektrische Permittivität	46
2.5	Leiter und Widerstände	48
2.5.1	Elektrischer Strom in Metallen und das ohmsche Gesetz	49
2.5.2	Serien- und Parallelschaltung von Widerständen	51
2.6	Klassifizierung der Materie nach elektrischen Eigenschaften	52
3	Elektrische Schaltungen	54
3.1	Kirchhoffsche Regeln	54
3.1.1	Knotenregel	54
3.1.2	Maschenregel	55
3.1.3	Gleichstromschaltungen	56
3.2	RC-Kreise	60

3.3	Induktivität und RL-Kreise	63
3.4	RLC-Kreise	64
3.4.1	RLC-Serienkreis	64
3.4.2	Weitere RLC Schaltkreise: Passive Frequenzfilter	72
4	Magnetostatik	75
4.1	Ursachen des Magnetfeldes	75
4.1.1	Das Biot-Savart'sche Gesetz	76
4.1.2	Das Ampère'sche Gesetz	78
4.1.3	Das Gauß'sche Gesetz des Magnetismus	79
4.2	Die Energiedichte des magnetischen Feldes	79
4.3	Der magnetische Dipol	80
4.3.1	Magnetischer Dipol und (Bahn-) Drehimpuls	81
4.4	Magnetismus in Materie	81
4.5	Kraft des Magnetfelds auf bewegte Ladungen	84
4.5.1	Kraft des Magnetfelds auf ein Leiterkabel	84
4.5.2	Bewegung freier Ladungen im Magnetfeld	85
4.5.3	Bewegung eines Drehimpulses im Magnetfeld	85
4.5.4	Der Hall Effekt	86
5	Elektromagnetismus	89
5.1	Elektromagnetische Induktion	89
5.1.1	Die Selbstinduktion	90
5.1.2	Technische Anwendungen des Induktionsgesetzes	90
5.2	Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom	91
5.3	Die Maxwell'schen Gleichungen	91